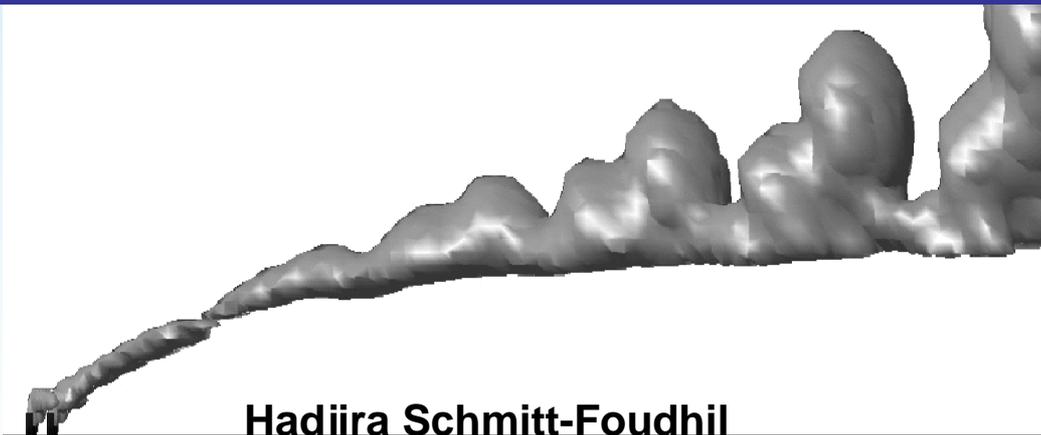


Météorologie de la couche limite atmosphérique

Module environnement atmosphérique et qualité de l'air



Hadjira Schmitt-Foudhil



hadjira.schmitt@enpc.fr



2 novembre 2010

Préoccupations environnementales

Détérioration de la qualité de l'air



Action mécanique du vent



Flux de gènes OGM, pathogènes



Préoccupations environnementales

Rejets industriels polluants, odeurs

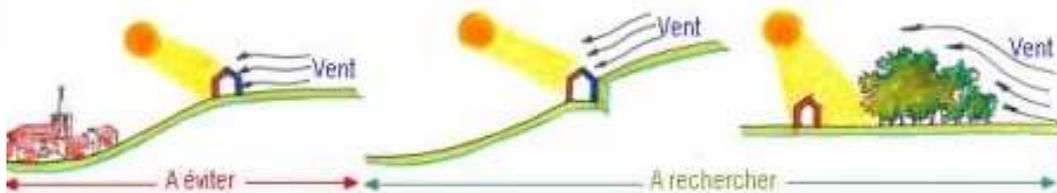


Action mécanique du vent



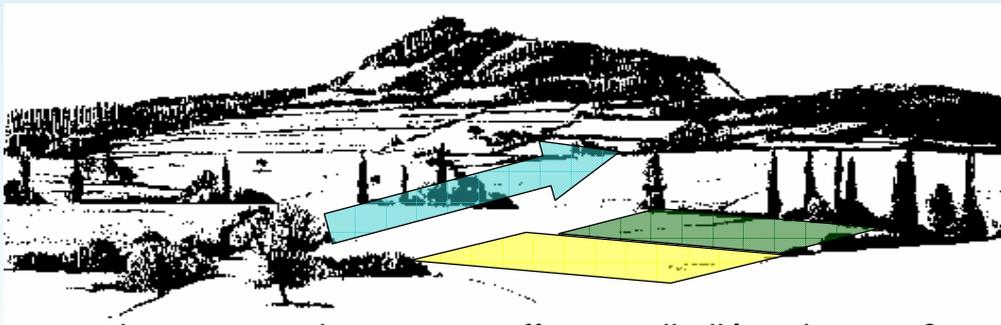
Nuisances sonores

Architecture bioclimatique



Motivations à l'étude de la CLA

Ces processus ont lieu dans la CLA



- Comment la structure du paysage affecte-t-elle l'écoulement ?
- Comment s'opère la diffusion de polluants en terrain hétérogène, en milieu urbain ?
- Comment évaluer le potentiel éolien d'un site ?
- Quels sont les effets mécaniques de la turbulence sur les structures naturelles ou artificielles ?
- Comment aménager un site pour limiter les risques ?

Simulation environnementale

- **Les réponses à ces questions passent par une approche multidisciplinaire :**
 - L'acquisition de données expérimentales : in situ, en conditions contrôlées...
 - Une modélisation fine de l'écoulement dans la couche limite atmosphérique et des échanges turbulents avec la surface terrestre
- **Les progrès de la **modélisation numérique** permettent maintenant d'aborder ces problèmes à cette échelle**

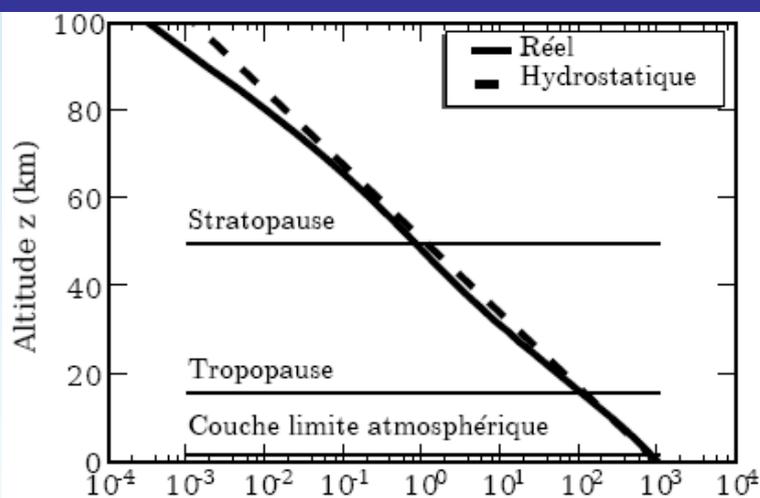
Plan de l'exposé

- **Structure verticale de l'atmosphère**
- **La couche limite atmosphérique**
 - Turbulence
 - Couche de surface
 - Couche d'Ekman
- **Atmosphère libre**
- **Dispersion atmosphérique**

Exercices



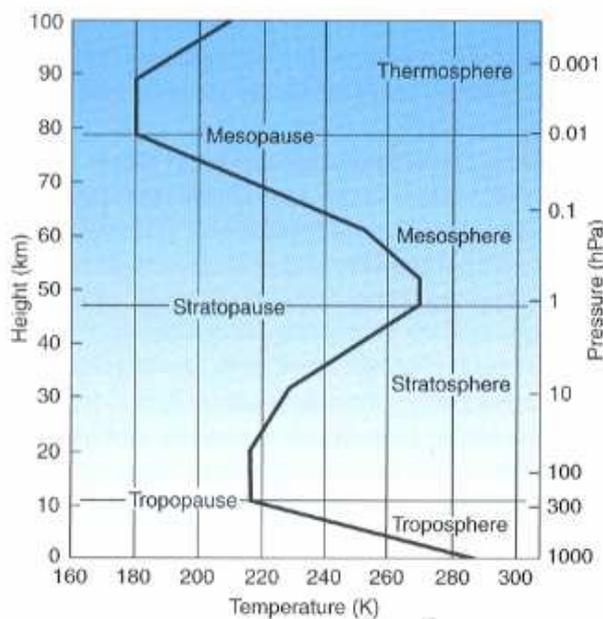
La pression atmosphérique



Profil vertical de pression (atmosphère standard USA 1976) calculée avec $H=7.3$ km ($T_{sol} = 250K$ $P_{sol} = 1000$ hPa)

- Modèle statique (atmosphère isotherme)
⇒ A l'atmosphère réelle on peut associer l'atmosphère homogène « équivalente » d'épaisseur $H \approx 7.3$ km appelée hauteur d'échelle
- $P(2 \text{ km}) = 760$ hPa, à la tropopause : $P(16 \text{ km}) = 110$ hPa , à la stratopause $P(50 \text{ km}) = 1$ hPa

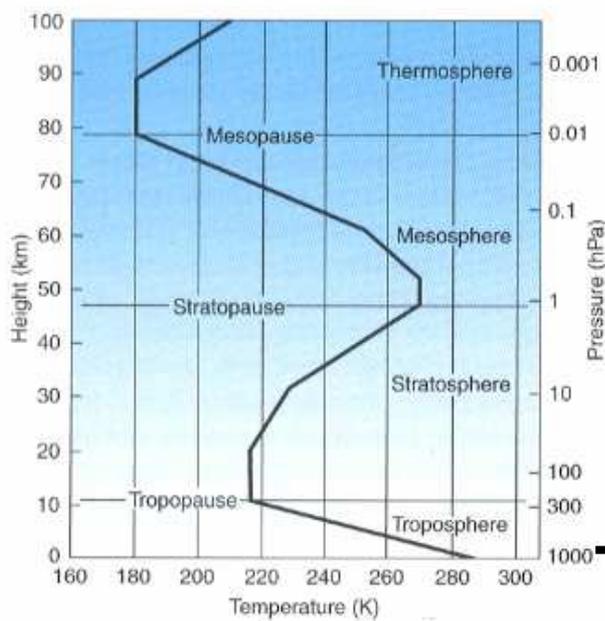
Structure verticale de l'atmosphère (1)



Profil vertical de température
(atmosphère standard USA 1976)

- **La thermosphère ~150 km**
 - T augmente et devient très dépendante de l'activité solaire
 - Air gaz raréfié
 - 10^{19} molécule m^{-3} à 100 km
 - 10^{25} molécule m^{-3} au sol
- **La mésosphère ~ 85 - 90 km**
 - T décroît jusqu'à 170 K (raréfaction de O₃ et O₂)
- **La stratosphère ~ 50 km**
 - T constante puis croissante jusqu'à 270 K ⇒ Absorption des UV solaires par O₃ et O₂
 - Cette couche d'inversion est une caractéristique essentielle de la Terre
- **La troposphère ~ 8 - 18 km**
 - T décroissance jusqu'à 220 K aux pôles et 190 K à l'équateur
 - Gradient moyen de T est de l'ordre de $-6.5 K km^{-1}$

Structure verticale de l'atmosphère (2)

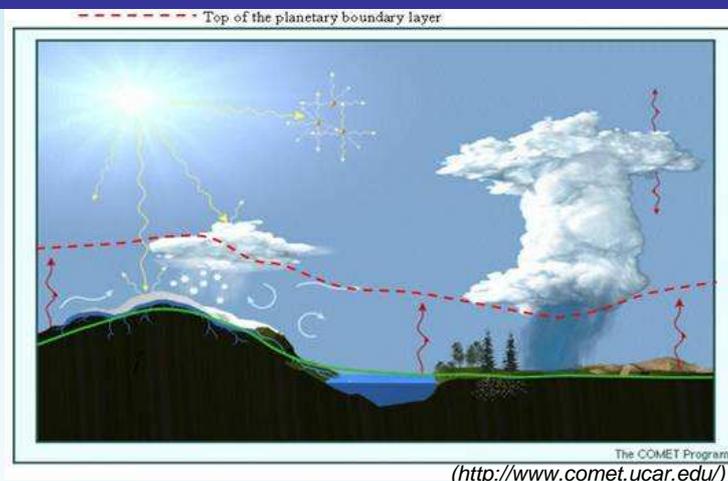


Profil vertical de température
(atmosphère standard USA 1976)

Atmosphère Libre (AL)
ensemble de l'atmosphère au-
dessus de la couche limite

Couche Limite Atmosphérique
CLA en contact avec la
surface terrestre

Couche limite atmosphérique : définitions



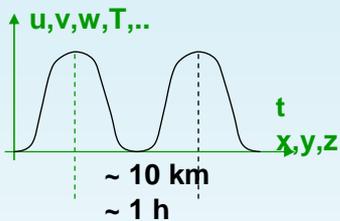
[Stull, 1988]

- D'un point de **vue dynamique**, la CLA est définie comme étant la zone de l'atmosphère où l'écoulement du fluide est influencé par l'interaction avec la surface terrestre directement. Le temps de réponse à un forçage (rugosité, relief, évaporation, transfert de chaleur, etc.) est court, de l'ordre de l'**heure**
- D'un point de **vue thermique**, la CLA est la zone de l'atmosphère au voisinage de la surface terrestre dans laquelle la variation diurne du rayonnement solaire est directement perceptible

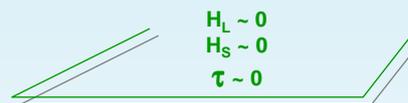
Eléments de définition de la CLA

[De Moor]

Atmosphère libre

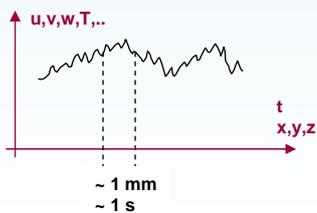


Influence directe de la surface négligeable
Turbulence négligeable

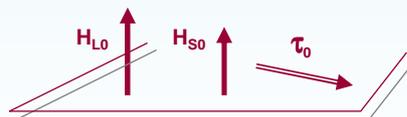


$h = 1 \text{ km}$

Couche limite atmosphérique



Influence directe de la surface importante
Turbulence importante

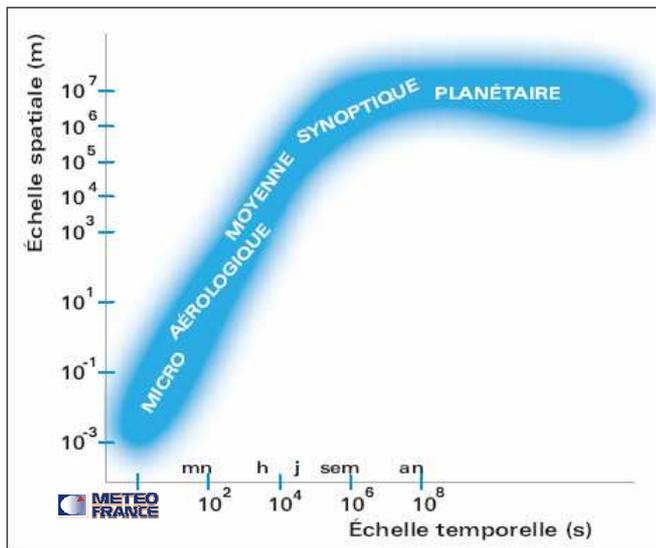


Caractéristique de la CLA

- La CLA est le domaine de la micro-météorologie
- L'influence de la surface est
 - dynamique : effet du frottement lié au gradients verticaux de vitesse air/surface
 - convective : effet du champs de pesanteur sur le profil de la masse volumique lié aux gradients verticaux de température ou d'humidité air/surface
- Le mouvement de l'air au voisinage de la surface terrestre a le plus souvent un caractère turbulent
- Influence directe du cycle diurne
- Epaisseur h_{CLA} varie dans le temps (variation diurne) et dans l'espace. On lui attribue usuellement un kilomètre comme valeur typique

Les phénomènes atmosphériques

[Beau]



Echelle planétaire

Échelle synoptique

Méso-échelle

Vent régionaux, brises, lignes de grains

Échelle aérologique

Orages isolés, tornades, thermiques pures

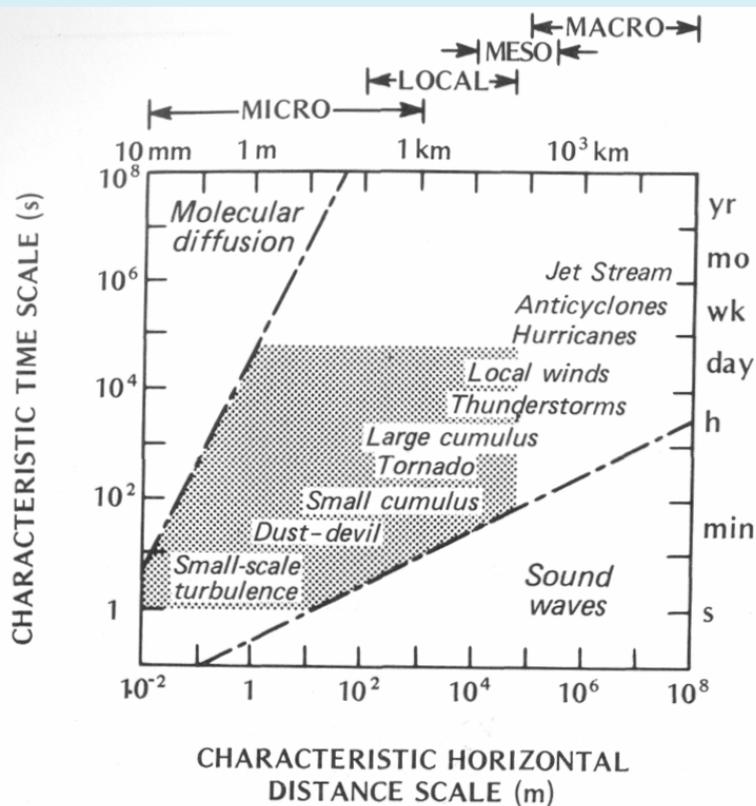
Micro-échelle

Tourbillons de poussières, rafales, microphysique des nuages (formation de gouttelettes)

Dans la réalité, toutes ces échelles sont étroitement imbriquées

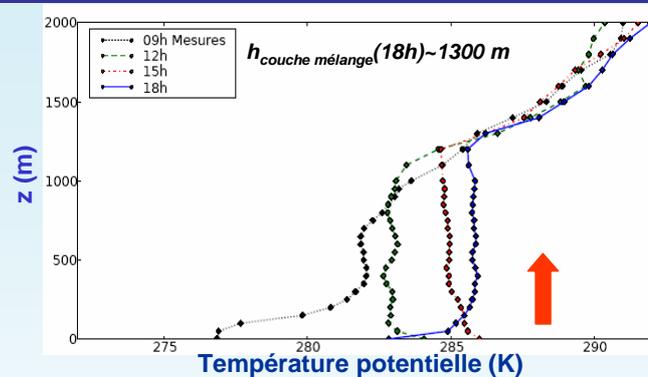
Echelles atmosphériques

[Oke, 1987]



- **Echelle globale**
~10000 km / semaine
– mois
- **Echelle continentale**
~1000 km / jours -
semaine
- **Echelle régionale**
~10-100 km / heures -
jour
- **Echelle urbaine /
locale**
~1km / minutes - heure

Profils de température potentielle et vent moyen horizontal en journée – Expérience de Wangara d33

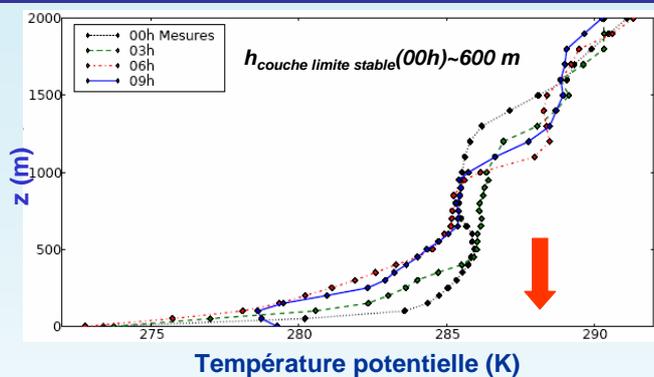


- En journée, le sol réchauffe la CLA par transfert turbulent : le flux de chaleur turbulent est positif - gradient de température est négatif
- Apparition d'une **couche de mélange** ou **convective** caractérisée par une turbulence très forte qui contribue à homogénéiser toutes grandeurs associées au fluide (température, quantité de mouvement, polluants..)

⇒ L'atmosphère est en stratification instable

- Au sommet de la CLA, une inversion thermique de stratification stable bloque les ascensions d'air qui replongent dans la couche de mélange provoquant l'entraînement des masses d'air de l'atmosphère libre dans la CLA. C'est la **couche d'entraînement**

Profils de température potentielle et vent moyen horizontal nocturnes – Expérience de Wangara d33



- Le soir, le sol se refroidit : la température du sol est inférieure à la température du fluide. Le flux de chaleur turbulent est négatif, dirigé vers le sol (gradient de température positif) et il y a **destruction de la turbulence d'origine dynamique**
- Le mélange est peu turbulent, la couche limite nocturne est mince (il y a accumulation des polluants) => **L'atmosphère est en stratification stable**
- Au-dessus, la couche de mélange de la journée précédente devient une **couche résiduelle**, en général neutre (gradient de température nul)

Température potentielle

- Lors d'une transformation adiabatique et sans changement d'état la température potentielle est conservée

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_o = cste$$

- L'atmosphère adiabatique est donc définie par $\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} = 0$

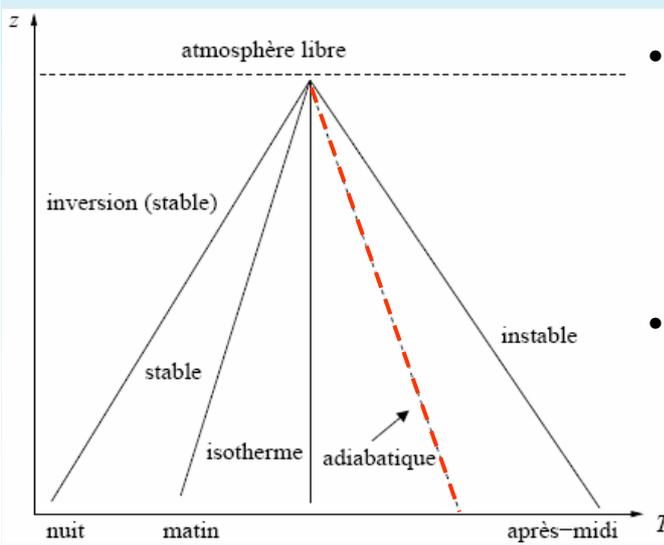
D'où
$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{C_p} = -\Gamma_{ad}$$

$$\Gamma_{ad} = \frac{g}{C_p} \approx 10 \text{ K / km} \text{ est le gradient adiabatique sec}$$

- Gradient de θ = écart à une situation adiabatique**

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} - \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ad} \right) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \left(\underbrace{\Gamma}_{-6.5^\circ / km} - \underbrace{\Gamma_{ad}}_{10^\circ / km} \right)$$

Stabilité atmosphérique



Profil idéal de température et évolution de la stabilité de la CLA au cours d'une journée. La température au sol augmente en cours de journée puis diminue au cours de la nuit

- $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0 \Rightarrow$ Atmosphère stable

$$\frac{\partial T}{\partial z} > \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ad}$$

- $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ Atmosphère neutre

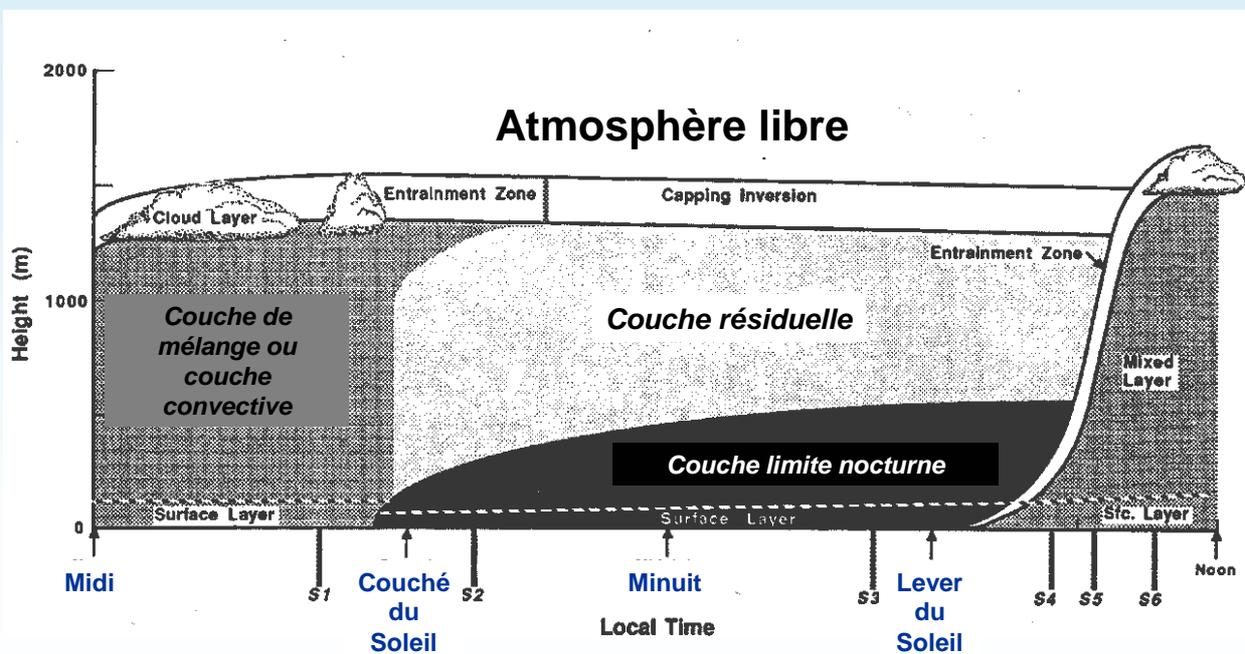
$$\frac{\partial T}{\partial z} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ad}$$

- $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0 \Rightarrow$ Atmosphère instable

$$\frac{\partial T}{\partial z} < \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ad}$$

Évolution de la stabilité de la CLA (cycle diurne)

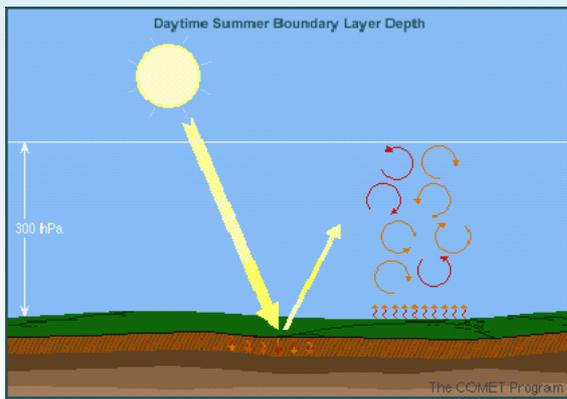
[Stull, 1998]



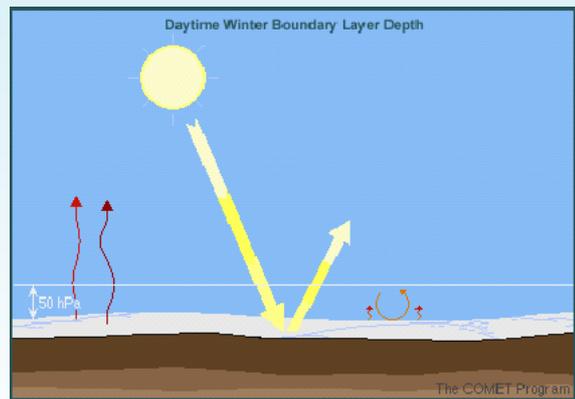
Surface layer == Couche de surface

Variabilité saisonnière de la CLA

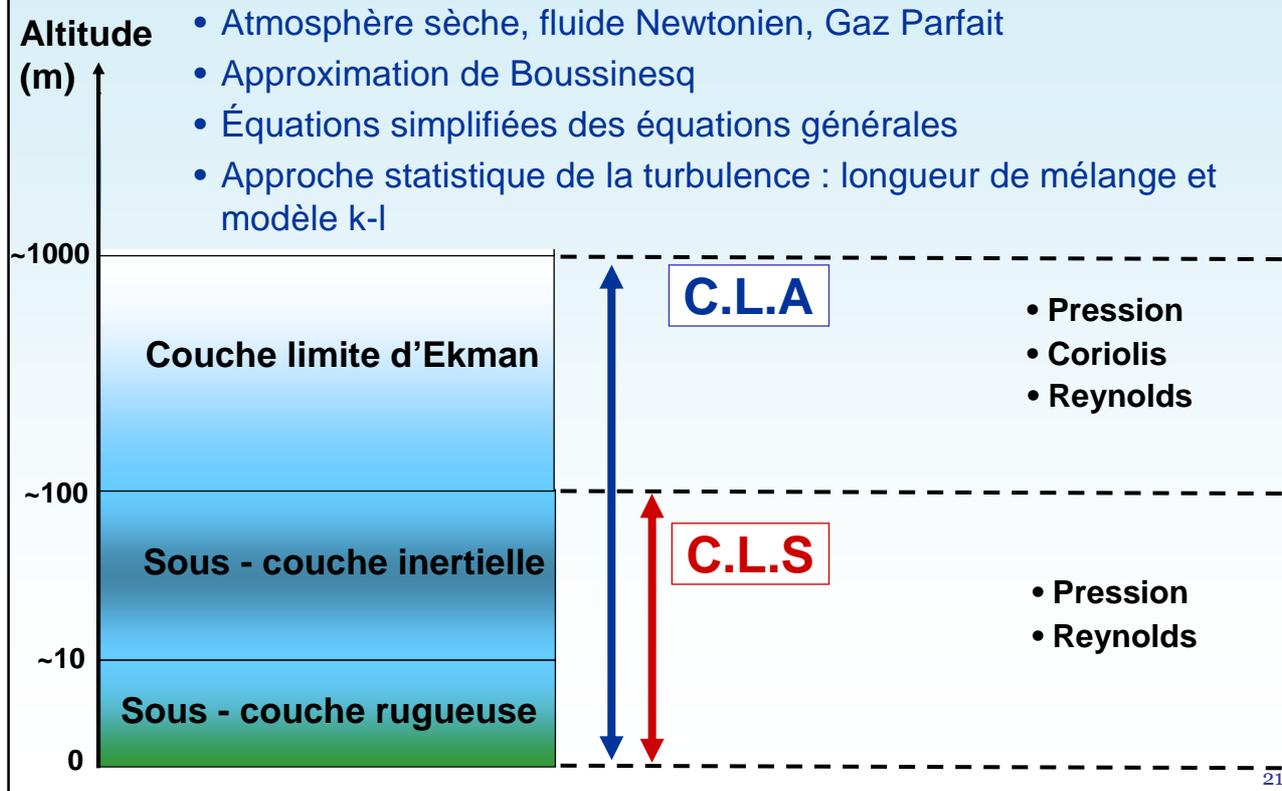
Eté



Hiver



Préliminaires choisis de la mécanique des fluides



Equations fondamentales de la mécanique des fluides (1)

**Gaz parfait, Fluide newtonien, Atmosphère sèche
Échelle du continuum, Repère lié à la terre**

- **Lemme fondamental** : équation de conservation de la masse locale
ou équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \xrightarrow{\text{Dérivée particulaire}} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Equations fondamentales de la mécanique des fluides (2)

- Équation de conservation de la quantité de mouvement ou *équation du mouvement*

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k$$

①
②
③
⑤
④

1- Variation temporelle

2- Transport par advection

3- Force de pesanteur ou force de gravité (force volumique)

4- Force de Coriolis, Ω désignant la rotation terrestre (force volumique)

5- Forces surfaciques données par le tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

$$dF_i = \sigma_{ij} n_j dS = T_i dS$$

vecteur unitaire orienté
vers le milieu agissant

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Pression

Frottement interne fct du tenseur
des contraintes visqueuses

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Viscosité dynamique

Equations fondamentales de la mécanique des fluides (3)

• Équation thermodynamique pour l'énergie interne $e_{\text{int}}=C_v T$

$$\rho \frac{\partial C_v T}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial C_v T}{\partial x_j} = -P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \phi + \frac{dQ}{dt}$$

①
②
③
④
⑤
⑥

1- Variation temporelle

2- Transport par advection

Postes de variation de l'énergie interne, apports de chaleur :

3- par compression / détente adiabatique

4- par conduction moléculaire (flux de chaleur conductif décrit par la loi de Fourier, λ est la conductivité thermique)

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

5- par dissipation moléculaire (que l'on néglige) $\phi_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij}$

6- par rayonnement (que l'on néglige)

• Équation d'état des gaz parfaits $P = \rho R T$

R constante massique des gaz parfaits $R = \frac{r}{M_{\text{air}}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour l'air sec

Equations fondamentales de la mécanique des fluides (4)

- **Équation de conservation de l'énergie (basée sur l'enthalpie)**

$$\rho \frac{\partial C_p T}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial C_p T}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \phi$$

①
②
③
④
⑤

1- Variation temporelle

2- Transport par convection/advection

3- Echauffement par compression

4- Flux de chaleur conductif décrit par la loi de Fourier $q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}$

5- Fonction de dissipation des effets visqueux $\phi_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ij}$

- **Équation d'état des gaz parfaits**

$$P = \rho RT$$

Le système de base pour l'air sec

• **Continuité**
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

• **Mouvement**

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - 2\rho \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k$$

• **Thermodynamique**

$$\rho \frac{\partial C_p T}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial C_p T}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

• **État** $P = \rho RT$

Ce système est fermé pour les variables ρ, u, v, w, T, P

Ex1 : équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible ?

- On note u, v, w les composantes de la vitesse suivant x, y, z et en considérant que l'accélération de la pesanteur et le vecteur de rotation de la terre (ϕ est la latitude) sont donnés par :

$$\vec{g} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \vec{\Omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \|\vec{\Omega}\| \cos \phi \\ \|\vec{\Omega}\| \sin \phi \end{vmatrix} \approx 0$$

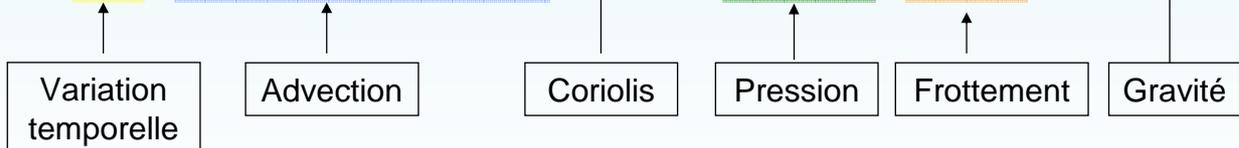
- On considère de plus que le **fluide est incompressible**

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

- Développer les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement. Cette dernière définit l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes pour un fluide incompressible

Equations de Navier-Stokes fluide incompressible

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g
 \end{aligned}$$



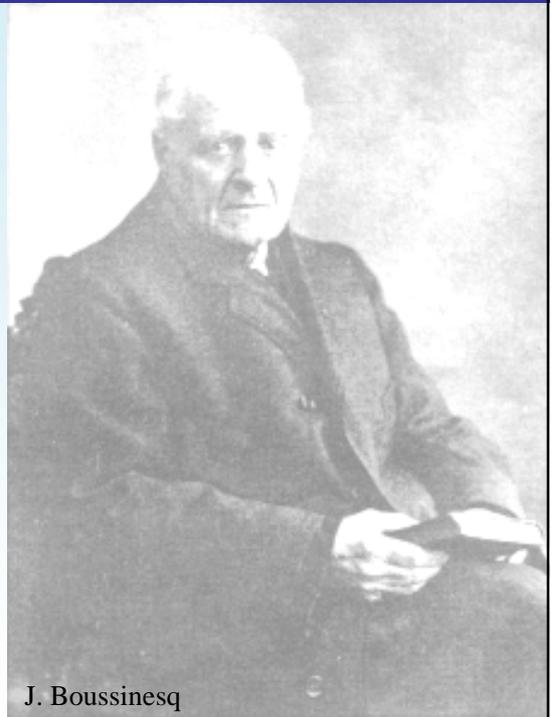
$f = 2\Omega \sin \phi$ défini le paramètre de Coriolis

$\Omega = \left| \vec{\Omega} \right| \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ vitesse de rotation de la terre

$\left| \vec{g} \right| = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

Approximations de Boussinesq

*Le système d'équations de la dynamique atmosphérique est extrêmement compliqué et peu utilisable : une des grandes difficultés de la météorologie consiste à **le simplifier de façon adaptée au problème traité***



J. Boussinesq

Approximations de Boussinesq

- L'état thermodynamique réel de l'atmosphère s'écarte peu d'un état **hydrostatique et adiabatique** (qualifié d'état de référence) pris au repos
- Nombre de Mach petit (vitesse / vitesse du son)
- Pas de trop hautes fréquences de mouvement dans l'écoulement
- L'échelle verticale des mouvements est petite devant l'épaisseur effective de l'atmosphère (8 km)

$$f = T, P, \rho$$

$$f = f_r(z) + f_l(x, y, z, t) = f_o + \delta f_r(z) + f_l(x, y, z, t)$$

Avec la valeur moyenne dans la CLA $f_0 = \frac{1}{h} \int_0^{h_{CLA}} f_r(z) dz$

Etat de référence de l'atmosphère

- Etat au repos $\vec{u}_r = 0$, **solution stationnaire des équations générales**
- Etat d'équilibre **hydrostatique** ne dépendant que de z
- Etat habituel de l'atmosphère (dont l'état réel s'écarte peu)
- Cet état est **entièrement** déterminé (h_o altitude choisie près de la surface) :

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial P_r}{\partial z} = -\rho g \\
 \frac{\partial T_r}{\partial z} = -g / C_p \\
 P_r = \rho_r R T_r
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 T_r(z) = T_r(h_o) Z(z) \\
 P_r(z) = P_r(h_o) Z(z)^{\frac{C_p}{R}} \\
 \rho_r(z) = \rho_r(h_o) Z(z)^{\frac{C_v}{R}} \\
 Z(z) = 1 - \frac{g / C_p}{T_r(h_o)} (z - h_o)
 \end{array} \right.$$

- La température potentielle est constante

$$\theta_r(z) = Cste = \theta_o$$

Hypothèses de base de l'approximation de Boussinesq

- La variation de l'état de référence avec z est faible, et limitée à 10% dans le premier kilomètre. Soit dans la CLA

$$\frac{|\delta f_r|}{f_0} \ll 1 \quad \text{pour } f = T, P, \rho \quad P_0 \approx \rho_0 R T_0$$

- L'état de référence étant connu, il est équivalent de travailler sur les variables thermodynamiques T, P, ρ , elles-mêmes ou sur leur écart à l'état de référence $f = f_r(z) + f_l(x, y, z, t)$

$$\frac{|f_l|}{f_0} \ll 1 \quad \text{pour } f = T, P, \rho \quad \text{et } h \ll h_e \approx 8 \text{ km}$$

- Remarque : ces hypothèses semblent suffisamment bien vérifiées dans la CLA mais l'approximation de Boussinesq n'a pas encore trouvé sa justification mathématique rigoureuse !

Ex2 : la force de flottabilité – thermique système de Boussinesq

- On se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq
- Pour une particule de masse unité, on définit :
 - Poids : $-g\vec{k}$
 - La poussée d'Archimède exercée par l'environnement : force dirigée vers le haut, de module "le poids du volume d'environnement déplacé", soit le produit du volume déplacé (celui de la particule $1/\rho$) par la masse volumique de l'environnement ρ_r par g

$$\frac{\rho_r}{\rho} g\vec{k}$$

1- Montrer que la résultante de son poids et de la poussée d'Archimède est

$$\vec{F}_f = -\frac{\rho_l}{\rho} g\vec{k} \approx -\frac{\rho_l}{\rho_0} g\vec{k} \quad \text{Force de flottabilité (par unité de masse)}$$

Ex2 : la force de flottabilité – thermique système de Boussinesq

- L'expression de la force de flottabilité en fonction de paramètres classique dépend de l'équation d'état retenue.

2- Dans le cas de l'air sec GP, elle peut s'écrire

$$\frac{\rho_l}{\rho_0} = -\frac{\theta_l}{\theta_0} \text{ fluide incompressible mais dilatable}$$

a) Donner l'expression correspondante de $\vec{F}_f = -\frac{\rho_l}{\rho_0} g \vec{k}$

b) Estimer l'écart de masse volumique entre particule et environnement pour un écart de 1°C. On prendra :

$$\theta_0 = 300 \text{ K} ; \rho_0 = 1.3 \text{ kgm}^{-3}$$

Dans le cas de l'air humide GP, elle peut s'écrire $\frac{\rho_l}{\rho_0} = -\frac{\theta_l}{\theta_0} - 0.608q_l$

a) Donner l'expression correspondante de \vec{F}_f

b) Estimer l'écart de masse volumique entre particule et environnement pour des écarts de 1°C en température et de 1g/kg en humidité.

Intérêt de l'approximations de Boussinesq

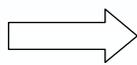
L'approximation de Boussinesq permet une formulation **incompressible** des équations de Navier-Stokes en prenant en compte des **forces de flottabilité** (poussée d'Archimède en présence de gravité) dues à la **dilatation du fluide induite par une variation de la température**

- Incompressible

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad \rho_r(z) \cong \rho_0$$

- Force de flottabilité (force par unité de masse)

$$\vec{F}_f \approx -\frac{\rho_l}{\rho_0} g \vec{k}$$



Équations instantanées simplifiées
Système de Boussinesq

Système de Boussinesq de la CLA

- Équation instantanée de conservation de la masse $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ B

- Équation instantanée de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_l}{\partial x_i} + \beta(\theta - \theta_0) \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k$$

- Équation instantanée de la conservation de l'énergie

$$\frac{dT_l}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_\theta \frac{\partial T_l}{\partial x_j} \right) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right)$$

$$\swarrow \quad T_l \approx \theta - T_r(h_0) \approx \theta - \theta_0 \quad \searrow$$

- Équation d'état $\frac{\rho_l}{\rho_0} = -\frac{T_l}{T_0} = -\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}$

$$k_\theta = \lambda / (\rho C_p)$$

Coefficient de flottabilité $\beta = \frac{g}{\theta_0} = \frac{g}{T_0}$

Equations de Navier-Stokes

Si à un instant donnée, θ est constante dans tout l'espace, cette condition est propagée par les équations du système de Boussinesq. Le système obtenu dans ce cas ($\theta \equiv \theta_0$) décrit un grand nombre d'écoulements incompressibles (isothermes) de laboratoire pour lesquels :

- il est indifférent d'utiliser P ou P_l, T ou θ ($P_r \approx P_o, T \approx \theta$ sur les épaisseurs mises en jeu dans les expériences de laboratoire)
- on peut négliger le terme de Coriolis

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

Force massique
Viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho_o}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_\theta \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad \text{Diffusivité thermique } k_\theta = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

NS

4 inconnus
4 équations

u, v, w, P

$\rho_o = \frac{P_o}{RT_o}$

La **température** se comporte alors comme un **scalaire passif** => régime de convection forcée : les problèmes dynamiques et thermiques sont découplés (la température n'influence pas la vitesse)

La turbulence dans la couche limite



De quoi s'agit-il ?

- Cette partie suggère que l'étude de la couche limite atmosphérique CLA doit faire appels aux outils des théories de la turbulence
- Il introduit les deux moteurs du mouvement dans la CLA
 - Les effets dynamiques, liés aux cisaillements de vent
 - Couche limite nocturne ou couche stable*
 - Et les effets de « flottabilité » ou convectifs, liés aux inhomogénéités de poids volumiques sur la verticale en se limitant aux effets convectifs d'origine thermique (air sec uniquement)

Le régime turbulent d'écoulement fluide

L'observation des écoulements fluides montre qu'il est possible de distinguer 2 grands régimes

- Celui où la vitesse est une fonction régulière de x_i et t , où le colorant diffuse peu et où les pertes de charge sont faibles

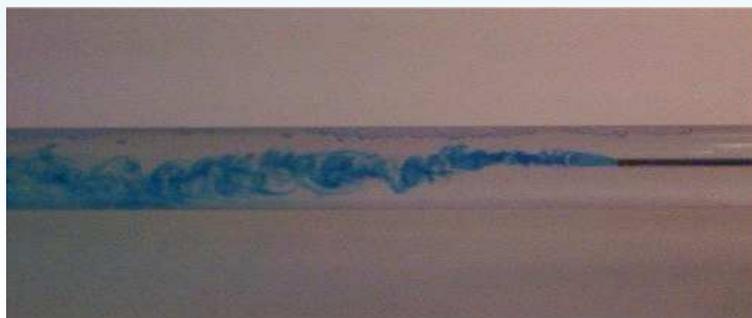
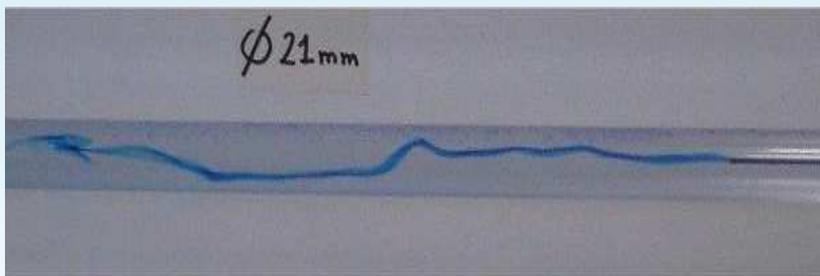
⇒ régime d'écoulement non turbulent ou laminaire

- Celui où la vitesse fluctue erratiquement en fonction de x_i et t , où le colorant diffuse au point de disparaître et où les pertes de charges sont beaucoup plus élevées

⇒ régime d'écoulement turbulent

Expérience de Reynolds

- Les 2 régimes des écoulements fluides sont mis en évidence de façon spectaculaire dans l'expérience de Reynolds (1884)



O. Reynolds

<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/Physique/Tp-phys/Term/Reynolds/Reynolds3.htm>

Le régime turbulent d'écoulement fluide

- Le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue de manière intermittente, mais brusque : c'est **la transition**
- La turbulence résulte de **l'instabilité des solutions régulières** (laminaires) de ces équations lorsque des paramètres caractéristiques (nombres de Reynolds, Rayleigh, Rossby, Grashof) dépassent certaines **valeurs critiques**
 - En dessous de ces valeurs, la solution est stable : les perturbations sont amorties
 - Au dessus, les perturbations subissent une amplification très rapide : les taches ou bouffées de turbulence se développent dans le temps et l'espace à partir de sources correspondant aux perturbations aléatoires initiales pour remplir tout l'écoulement si les conditions si prêtent
- La turbulence est une **propriété des écoulements** et non du fluide, dont le détail du mouvement continue à obéir aux équations de Naviers-Stokes

CLA dynamique et turbulence

• Couche limite dynamique

- Paramètre de contrôle du régime des écoulements : **Nombre de Reynolds**

$$\text{Re} = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{UL}{\nu}$$

$\text{Re} < \text{Re}_{\text{critique}} \Rightarrow$ L'écoulement est laminaire

$\text{Re} > \text{Re}_{\text{critique}} \Rightarrow$ L'écoulement est turbulent

- Avec U une vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse moyenne, vitesse débitante, variation de vitesse entre 2 couches fluides, etc.)
- L une longueur caractéristique de l'écoulement
- ν la viscosité cinématique du fluide

• CLA : $U \approx 15 \text{ m.s}^{-1}$, $h_{\text{CLA}} \approx 1000 \text{ m}$, $\nu \approx 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

$$\text{Re} = \frac{U h_{\text{CLA}}}{\nu} = 10^9 \gg R_{\text{critique}} \approx 3000$$

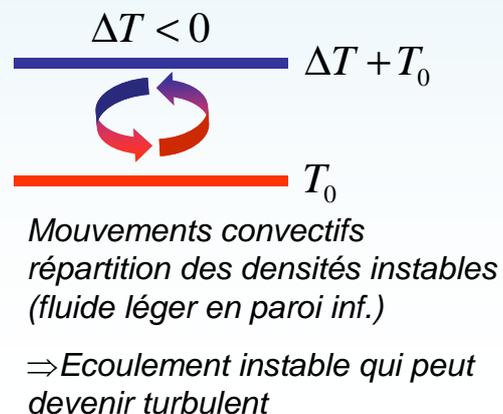
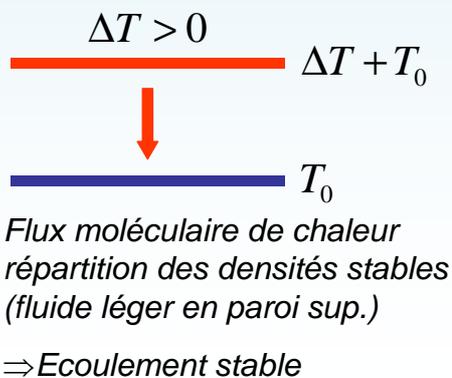
Expérience de Rayleigh-Bénard

- **Couche limite thermique**

– Paramètre de contrôle du régime des écoulements : **Nombre de Rayleigh**

$$Ra = \frac{g L^3 \Delta T}{T_0 \nu k} = \frac{\text{"facteurs déstabilisateurs"}}{\text{"facteurs stabilisateurs"}}$$

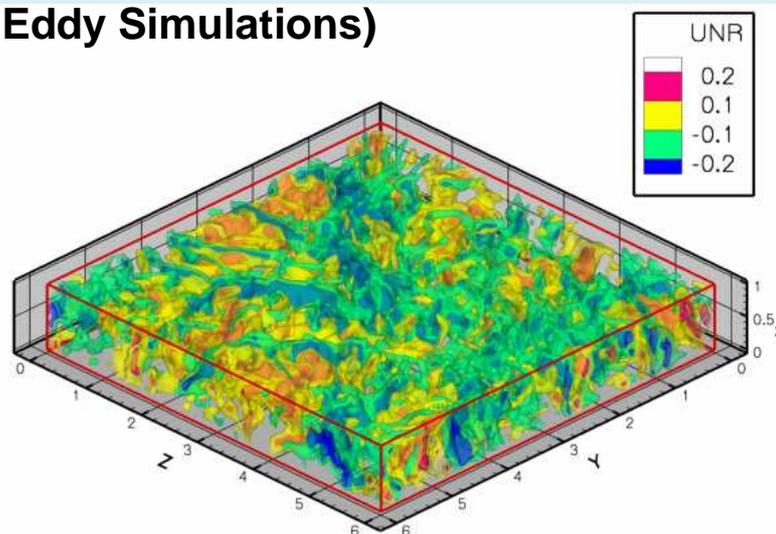
– Expérience de Rayleigh-Bénard



CLA thermique et turbulence

[Serge et al.]

- Vitesse verticale instantanée, $Ra=2 \cdot 10^7$, $Pr=0.71$, modèle **LES** (Large Eddy Simulations)



- CLA : $T_0 \approx 300$ K, $h_{CLA} \approx 1000$ m, $g \approx 10$ m².s⁻¹, $k \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m².s⁻¹, une variation de 1 degré

$$|Ra| = 10^{17} \gg |R_{acritique}| \approx 50000$$

Caractéristiques fondamentales du mouvement turbulent

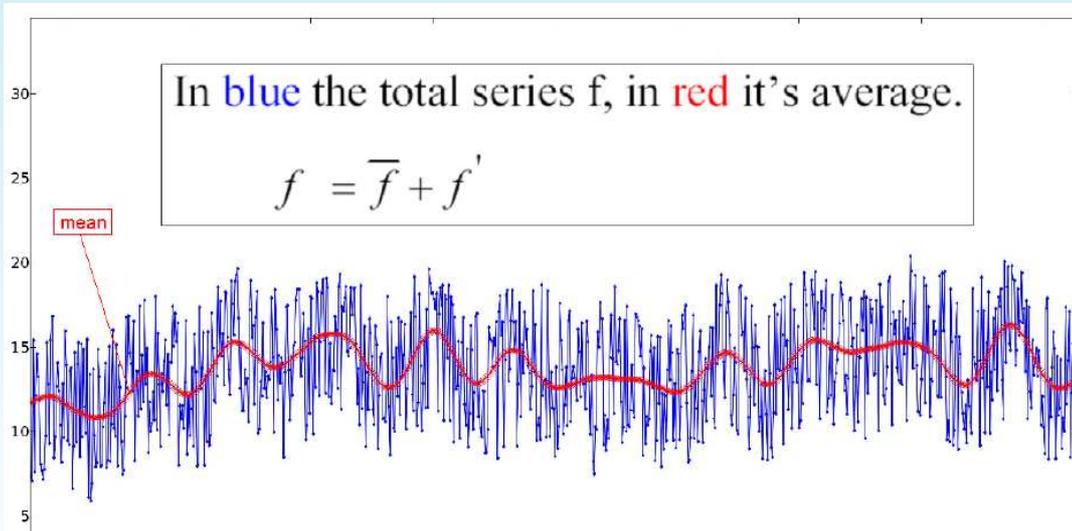
- Les variables (V, P, T...) présentent un caractère **aléatoire en fonction du temps et de l'espace**
- Les écoulements turbulents présentent un **caractère rotationnel** : on peut y observer des tourbillons intenses possédant toute une gamme d'échelles : les plus gros ont des dimensions du même ordre que celles de l'écoulement et les plus petits correspondent à des nombres de Reynolds voisins de l'unité
- La turbulence est un phénomène fondamentalement **non linéaire**, intrinsèquement liées aux termes d'inertie dans les équations de NS. L'énergie cinétique du mouvement turbulent est produite aux grandes échelles et dissipée en chaleur par viscosité aux petites échelles via un mécanisme de cascade, dont les termes d'inertie sont responsables
- La turbulence est un phénomène **dissipatif** qui augmente le taux des processus irréversible comme la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur par le travail des forces de viscosité
- La propriété la plus importante du point de vue pratique est son **aptitude à diffuser toute grandeur associée au fluide** (quantité de mouvement, chaleur, concentration...) avec une efficacité bien supérieure à celle de la diffusion moléculaire

Quelques approches pour la modélisation de la turbulence

Pas de théorie générale pour appréhender le mouvement turbulent
Différentes approches pour résoudre les équations présentées

- La **simulation numérique directe DNS** utilise le système d'équations sans traitement spécifique mais doit capter l'écoulement dans sa totalité. Cette simulation déterministe doit résoudre toutes les échelles spatio-temporelles
 - ⇒ Maillage de l'ordre de $Re^{3/4}$ dans chaque direction
 - ⇒ Pour la CLA : $10^{81/4}$ points de calcul pour $Re=10^9$
- La **simulation directe des grandes échelles LES** permet grâce à une technique de filtrage spatio-temporelle de résoudre les grandes échelles de la turbulence et modélise les structures inférieures en extrayant artificiellement de l'énergie pour les échelles dissipatives (modélisation semi-empirique)
- La modélisation du mouvement turbulent par une **approche statistique RANS** (opérateur de Reynolds) qui semble adaptée pour les écoulements atmosphériques à grands nombres de Reynolds, en turbulence pleinement développée

Approche statistique d'une variable turbulente



Les phénomènes chaotiques nécessitent une approche statistique. On abandonne l'idée des vitesses instantanées pour rechercher des propriétés moyennes. On décompose ainsi le mouvement instantané en :

mouvement instantané = mouvement moyen + fluctuation

Traitement statistique de Reynolds

- **Définition de l'opérateur moyenne temporelle**

- Postulat d'ergodicité : la moyenne dans le temps d'un paramètre quelconque est égale à la moyenne de ce paramètre prise sur un ensemble de système [Ngo 95]

$$\bar{f} = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} f(t') dt' \equiv \frac{1}{N} \sum_1^N f(t) = \langle f \rangle_N$$

- Toute variable aléatoire admet une décomposition de Reynolds $f = \bar{f} + f'$

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \quad \overline{f'} = 0 \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\overline{f g} = \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} \longleftarrow \text{Terme de corrélation (double) turbulente inconnu !}$$

La conséquence inhérente à l'approche statistique est un accroissement du nombre d'inconnus => modèles de fermeture

Ex3 : équations de Reynolds ?

- En appliquant l'opérateur moyenne temporelle de Reynolds aux variables turbulentes u, v, w, P, T , expliciter :
 - l'équation moyenne de continuité
 - l'équation moyenne de conservation de quantité de mouvement de la CLA simplifiées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq **B**
- On rappelle que
 - Toute variable aléatoire admet une décomposition de Reynolds

$$f = \bar{f} + f'$$

- Les règles de calculs de l'opérateur de Reynolds

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \quad \overline{f'} = 0 \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}$$

Equations de Boussinesq pour la CLA

- On pose $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ $P = \bar{P} + p'$ $T = \bar{T} + T'$ $\theta = \bar{\theta} + \theta'$



- Équation moyenne de continuité $\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$ ← Le champ moyen est à divergence nulle, comme le champ instantané

- Équation moyenne de conservation de quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overbrace{u'_i u'_j} \right] + \beta (\bar{\theta} - \theta_0) \delta_{i3} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k$$

Tenseur des contraintes de Reynolds
= frottements turbulents



- Cette dernière équation définit l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible

Energie cinétique moyenne (1)



Il convient maintenant d'aborder 2 questions fondamentales :

- La provenance de l'énergie du mouvement fluctuant
- La compréhension des transferts d'énergie entre tourbillons turbulents de différentes tailles et échelles associées

- En écoulement turbulent : $u_i = \bar{u}_i + u'_i$
- On a une nouvelle expression de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} u_i u_i = \frac{1}{2} (\bar{u}_i \bar{u}_i + 2\bar{u}_i u'_i + u'_i u'_i)$$

- L'énergie cinétique moyenne est donnée par

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_i} + \cancel{\overline{2\bar{u}_i u'_i}} + \overline{u'_i u'_i}) \implies \boxed{\bar{E}_c = \bar{K} + k}$$

Où :

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{\bar{u}_i \bar{u}_i} \text{ Energie cinétique du mouvement moyen}$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \text{ Energie cinétique moyenne du mouvement turbulent}$$

Comment l'énergie se transmet du mouvement moyen au mouvement turbulent et ce qu'il en advient ?

Energie cinétique moyenne (2)



Equation de $\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ énergie cinétique du mouvement moyen

$$\overline{N.S \times u_i} \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{u}_i F_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_j \frac{\bar{P}}{\rho} - \dots \right] - \frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (I)$$

Equation de $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent

$$\overline{(N.S(\bar{u}_i + u'_i) - N.S) \times u'_i} \frac{dk}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\overline{u' P'}}{\rho} - \dots \right] - \frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (II)$$

Equation de $\bar{E}_c = \bar{K} + k$ énergie cinétique moyenne

$$\overline{I + II} \frac{d\bar{E}_c}{dt} = \bar{u}_i F_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{u}_j \frac{\bar{P}}{\rho} - \dots \right] - \frac{\nu}{2} \overline{\left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]}$$

Taux de dissipation visqueuse



Equation de $\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ énergie cinétique du mouvement moyen

Taux de **dissipation visqueuse** associé au **mvt moyen** : il est positif mais précédé d'un signe "-" => il contribue à diminuer K (transforme l'énergie cinétique en chaleur)

$$-\frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

Equation de $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent

Dissipation d'énergie du mouvement turbulent : terme positif mais précédé d'un signe "-" => contribue à diminuer k. (k est dissipée en chaleur à cause de l'effet de viscosité). ϵ est le **taux de dissipation de k**

$$-\frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

Equation de $\bar{E}_c = \bar{K} + k$ énergie cinétique moyenne

On montre que la dissipation visqueuse due au mouvement turbulent ϵ est très supérieure à celle due au mouvement moyen (analyse en ordre de grandeur du rotationnel par exemple)

$$-\frac{\nu}{2} \left[\underbrace{\overline{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2}}_{\ll \epsilon} + \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \right]$$

54

Taux de production



Equation de $\bar{K} = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ énergie cinétique du mouvement moyen

Ce terme, associé à la turbulence, en général est négatif. Il contribue à **diminuer l'énergie cinétique du mouvement moyen**

$$+ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (I)$$

Equation de $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent

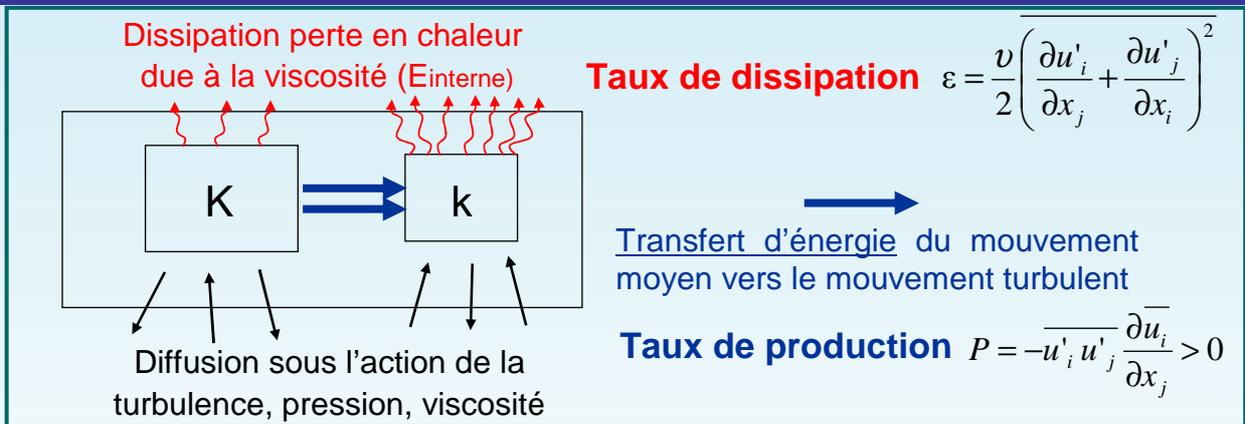
En général, sa contribution est **d'augmenter l'énergie turbulente au détriment de l'énergie du mouvement moyen**. Ce terme s'appelle taux de production P de l'énergie cinétique de la turbulence (P>0)

$$- \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (II)$$

Equation de $\bar{E}_c = \bar{K} + k$ énergie cinétique moyenne

Le terme apparait dans l'équation (I) avec un signe "-" et dans l'équation (II) avec un signe "+". Il ne modifie donc pas l'énergie cinétique totale moyenne; mais par contre, il traduit une **transformation de l'énergie cinétique du mouvement moyen vers l'énergie cinétique de la turbulence**

Transformation de l'énergie cinétique



- On montre que le flux d'énergie de la turbulence est nul en moyenne et que la variation d'énergie cinétique de la turbulence est nulle en moyenne (turbulence homogène) :

$$\cancel{\frac{d\overline{k}}{dt}} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\cancel{\frac{\overline{u' P'}}{\rho}} - \dots \right] - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

C'est l'écoulement turbulent typique : turbulence dont l'énergie cinétique est alimentée par K et dissipée au même taux en chaleur par viscosité. On dit que **l'écoulement turbulent est en équilibre local**

$$0 \approx P - \varepsilon$$

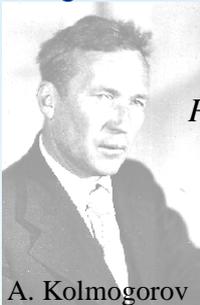
Cascade de Kolmogorov



Turbulence créée et alimentée en énergie à grande échelle

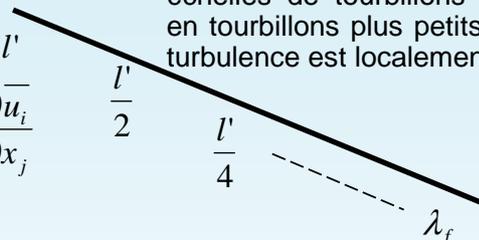
[Kolmogorov, 1941]

Cascade inertielle où on va avoir différentes échelles de tourbillons (division des tourbillons en tourbillons plus petits). A un certain stade, la turbulence est localement isotrope et homogène



A. Kolmogorov

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$



Energie qui va se dissiper au même taux, en chaleur par viscosité, à petite échelle

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

Cette cascade inertielle a été décrite par Kolmogorov et les échelles fondamentales ont été explicités :

- L'échelle intégrale ou "échelle des gros tourbillons" énergétiques qui ont une action sur le mvt moyen. Ces tourbillons sont essentiellement porteurs de l'énergie cinétique k ; ils ont une vitesse caractéristique et un temps de retournement donnés par

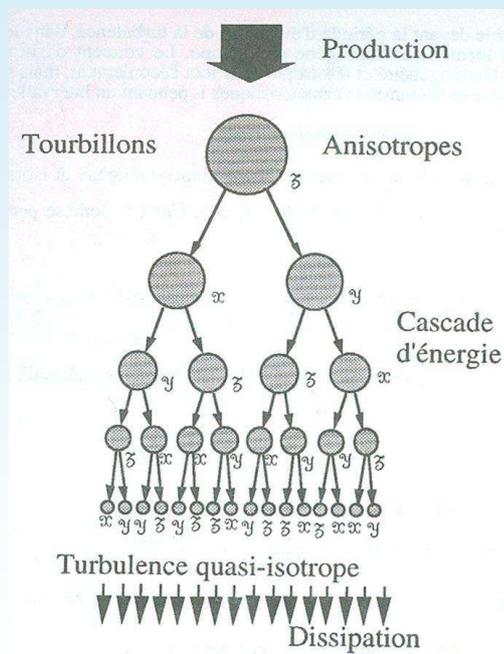
$$l' = L_t \approx \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad u' \approx k^{1/2} \quad T \approx \frac{L_t}{u'} \approx \frac{k}{\varepsilon}$$

- L'échelle de Kolmogorov ou "petite échelle" : plus petite taille des tourbillons dissipatifs

$$\lambda_f \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad u_f \approx (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad \tau = \frac{\lambda_f}{u_f}$$

Processus schématique de la cascade inertielle

[Schiestel, 1993]



Arborescence de Bradshaw illustrant la cascade d'énergie, la tendance à l'isotropie de la microturbulence, processus schématique

- Un des mécanismes essentiels responsable de la cascade énergétique est l'étirement des filets tourbillons (vortex stretching)

- Un étirement initial dans la direction z intensifie le mouvement dans les directions x et y en réduisant l'échelle. Après plusieurs répétitions l'isotropie est approchée

Modélisation phénoménologique des corrélations turbulentes

- Pour une grandeur ϕ quelconque de la turbulence

Analogie entre les transferts de types diffusifs par agitations moléculaires et par agitations turbulentes

$$\overline{\phi' u'_j} = -u' l' \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}$$

u' : vitesse moyenne caractéristique des fluctuations du mvt turbulent

l' : longueur caractéristique de la turbulence (gros tourbillons énergétiques)

- On définit le **coefficient de diffusivité turbulente** associé à la grandeur ϕ

$$k_{\phi_i} = u' l'$$

=> Le flux moyen turbulent de ϕ est $\overline{\phi' u'_j} = -k_{\phi_i} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}$

Concept de viscosité turbulente

[Boussinesq 1877]

- Modélisation du flux turbulent de la quantité de mouvement

$$(\phi' = \rho u'_i) \quad -\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

ν_t viscosité turbulente [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]

Contrairement à la viscosité cinématique qui est une propriété intrinsèque du fluide, la viscosité turbulente est une propriété de l'écoulement : elle doit être modélisée par des échelles représentatives du mouvement turbulent

$$\nu_t = u' l'$$

- Estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité turbulente

$$u' \approx \frac{U}{10} \quad l' \approx \frac{L}{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{\nu_t}{\nu} = \frac{u' l'}{\nu} = \frac{1}{30} \frac{U L}{\nu} = \frac{\text{Re}}{30} \quad \nu \ll \nu_t$$

La diffusion turbulente est bien plus efficace que la diffusion moléculaire !

60

Équations moyenne de la CLA



Utilisons le concept de viscosité turbulente...

Équation de continuité

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \beta (\bar{\theta} - \theta_0) \delta_{i3} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k$$

Equation de l'énergie

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(k_\theta + k_{\theta t}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right]$$

$$\overline{T'u'_j} = -k_{\theta t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad \text{Flux de chaleur turbulent}$$

Diffusivité thermique turbulente $T_l \approx \theta - \theta_0$

$$\nu_t, k_{\theta t} = \frac{\nu_t}{Pr_t}$$

← ... mais la viscosité turbulente est inconnue !

Modèles de fermeture

$$V_t = u' l' \quad ??$$

$$? \quad l' \quad ? \quad u' \quad ?$$

$$? \quad ?$$

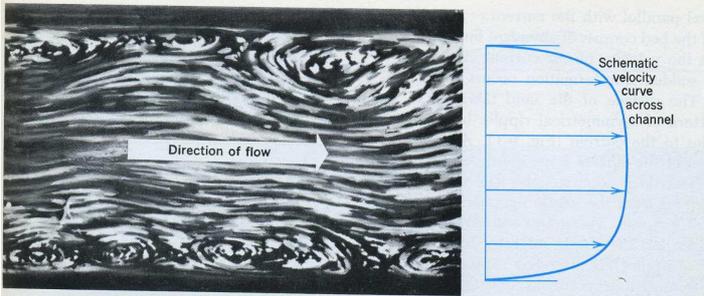
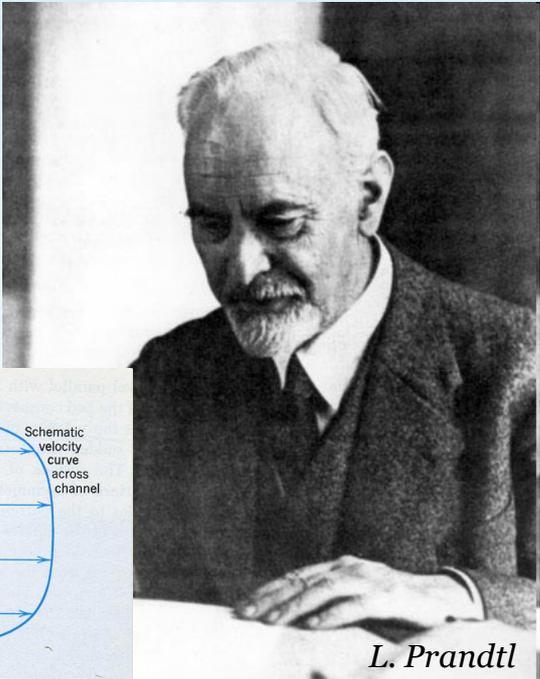


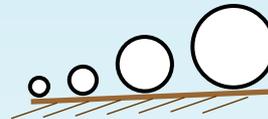
Fig. 9-7. Turbulent flow in an open channel, seen looking down onto surface of stream. Because of drag, turbulence at the surface is greatest near the channel sides. (From a photograph in Prandtl and Tietjens, Applied Hydro- and Aeromechanics; courtesy Engineering Societies Monographs Committee.)

Fermeture à zéro équation de transport

[Prandtl, 1925]

Longueur de mélange de Prandtl l_m

$$l' = l_m = \kappa z \text{ avec } \kappa = 0.41$$



+

$$u' = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right|$$

→

$$\nu_t = u' l_m = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right|$$

• Bons résultats pour les écoulements cisailés simples mais manque d'universalité : considérations géométriques (l_m) et trop grande dépendance vis-à-vis de l'écoulement moyen (u')

• Idée : chercher à relier u' et l' à des grandeurs intrinsèques de l'écoulement turbulent !

⇒ 1 bon candidat pour u' : l'énergie cinétique du mvt turbulence k !



$$u' = \sqrt{k} \longrightarrow \text{Equation de } k$$

Modèle de fermeture à 1 équation de transport Modèle k-l

Équation de l'énergie cinétique moyenne du mouvement turbulent

turbulent $k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}$ $\nu_t = C_{l\mu} l_m \sqrt{k}$ $l_m = \kappa z$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + (P_k + P_h) - C_{l\varepsilon} \frac{k^{3/2}}{l_m}$$

Transport de k par diffusion turbulente, visqueuse et par pression fluctuante

Productions dynamique et thermiques de k

Taux de dissipation ε de l'énergie cinétique moyenne du mvt turbulent

$$P_h = \beta \overline{T' w'}$$

$$P_k = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

l_m	σ_k	$C_{l\varepsilon}$	$C_{l\mu}$	P_{rt}
κz	1.66	0.16	0.54	0.95

Longueur de mélange et constantes du modèle k-l dans la couche de surface ($z < 200$ m), en régime de convection forcée [Pielke 84, Chassaing 00]

Turbulence et stabilité

$$\text{Production thermique } P_h = \beta \overline{T'w'}$$

- $P_h > 0$ $\overline{T'w'} > 0$
 - La turbulence est d'origine **thermique** et **dynamique** (amplifiée)
 - Régime de convection mixte
 - CLA en stratification instable (profil de T suradiabatique, jour)
- $P_h = 0$ $\overline{T'w'} = 0$
 - La turbulence est uniquement d'origine **dynamique**
 - Régime quasi-neutre ou de convection forcée : la température est **un scalaire passif** (couverture nuageuse importante)
- $P_h < 0$ $\overline{T'w'} < 0$
 - La production gravitationnelle se comporte comme un **terme puits** vis-à-vis de la turbulence qui ne pourra se maintenir que si $P_k > -P_h$
 - CLA en stratification stable (profil en condition d'inversion, nuit)
 - Situation extrême, turbulence inhibée $P_k \rightarrow 0$: régime de convection libre, stratification très stable

Modèle de fermeture à 2 équations de transport Modèle k-ε (à titre indicatif)

**Modèle k-e : équation de k + équation du taux de dissipation
(~pseudo-dissipation)**

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

bon candidat pour l':
l'échelle intégrale



$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} (P_k + P_h) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Transport de ε par diffusion
turbulente, visqueuse et
par pression fluctuante

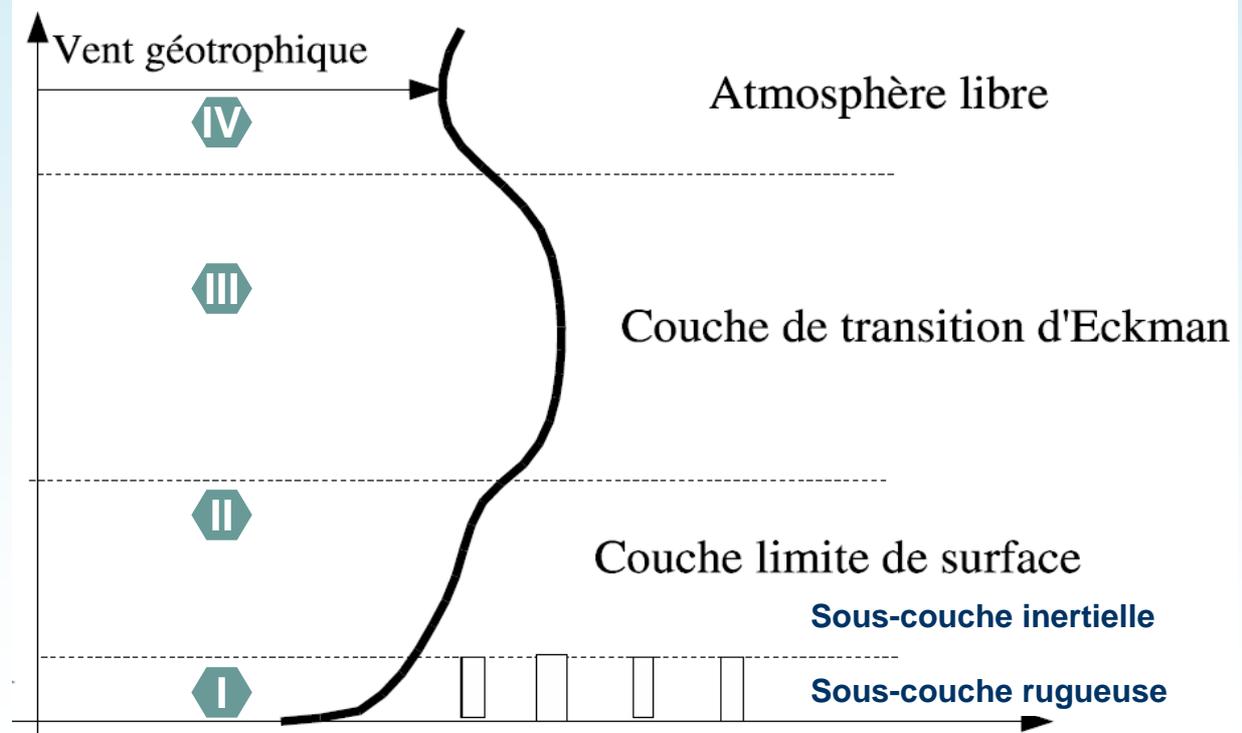
Productions de ε

Dissipation de
ε par action de
la viscosité

σ_k	σ_ε	P_{rt}	C_μ^a	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
1	1.3	0.95	0.09	1.44	1.92

Constantes du modèle k – ε standard [Launder 74]

Les sous-couches de la CLA



Ex4 : Étude d'une CL sur plaque plane Interaction dynamique avec une paroi (1)

Soit une couche limite turbulente, statistiquement homogène horizontalement et stationnaire d'un fluide incompressible, au voisinage d'une paroi, en l'absence de force de pression moyenne, de Coriolis et de flottabilité. La vitesse moyenne est horizontale de direction fixe choisie comme axe (ox) et l'axe vertical est noté z.

1- Montrer que les équations du mouvement se réduisent à

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} = cste = \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 \quad \begin{array}{l} \tau_0 \text{ contrainte de cisaillement au sol [kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}] \\ u_* = (\tau_0 / \rho)^{1/2} \text{ vitesse de frottement [m.s}^{-1}] \end{array}$$

2- Paroi dynamique lisse

Expliciter la loi de variation de $\bar{u}(z)$

A) Juste au-dessus de la paroi ($z \leq 5 \frac{\nu}{u_*}$) en fonction de u_* , ν et z

B) Loin de la paroi ($z \geq 30 \frac{\nu}{u_*}$), en fonction de u_* , ν , z et d'une constante que l'on calculera en considérant que les 2 lois se « raccordent » en $\frac{zu_*}{\nu} = 11,1$

C) On désire caler les constantes d'un modèle de turbulence de type k-l sur cet écoulement idéal. Calculer la constante C_2 en supposant que $k \approx 3.5 u_*^2$

$$\nu_t = C_2 l_m k^{1/2}$$

Ex4 : Étude d'une CL sur plaque plane Interaction dynamique avec une paroi (2)

3- Paroi dynamique rugueuse

On considère maintenant que la paroi est rugueuse avec une hauteur moyenne des éléments du micro-relief $\bar{h}_s = \frac{1}{\text{Aire}_{\text{plaque}} \text{ plaque}} \iint h_s(x, y) dx dy$. Enfin on définit par $z_0 \approx \frac{\bar{h}_s}{10}$ la longueur de rugosité

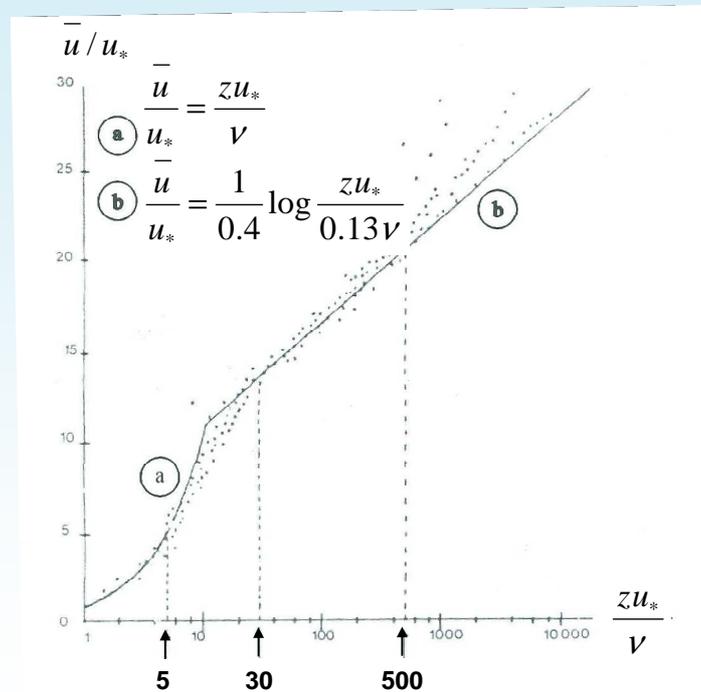
Exprimer la loi de variation de $\bar{u}(z)$ en fonction de u_* , z et z_0 en considérant que la paroi est dynamiquement complètement rugueuse $\frac{\bar{h}_s u_*}{\nu} > 60$ (c-a-d qu'au voisinage immédiat de la paroi, l'écoulement est constitué de tourbillons engendrés par les aspérités) et que la vitesse s'annule en $z = z_0$

4- Généraliser cette loi de $\bar{u}(z)$ dans le cas d'une paroi dynamique lisse $\frac{\bar{h}_s u_*}{\nu} < 4$. On montrera en particulier que z_0 ne dépend que de u_* et ν (les aspérités sont totalement immergés dans la couche visqueuse)

$$z_0 \approx 0.13 \frac{\nu}{u_*}$$

Profil de vitesse au voisinage d'une paroi lisse (3)

[De Moor]



Exemple de synthèse de mesures du profil de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi lisse

Classification des écoulements neutres à flux constant vis-à-vis de la rugosité (4)

[De Moor]

\bar{h}_s / z_*	dénomination du cas	micro-relief versus rugosité	validité de la loi logarithmique $\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \text{Log} \frac{z}{z_0}$
< 4	(dynamiquement) lisse	aspérités immergées dans la couche visqueuse δ_v 	$z \geq 30 \frac{\nu}{u_*} \approx 230 z_0$ $z_0 \approx 0.13 \frac{\nu}{u_*}$
> 4 < 60	(dynamiquement) modérément rugueux	aspérités dépassant de la couche visqueuse δ_v 	$z \geq 100 z_0$ z_0 dépend de l'écoulement (ν/u_*) et de la plaque ($\bar{h}_1, h_{s1}, h_{s2}, \dots$)
> 60	(dynamiquement) complètement rugueux	plus de couche visqueuse : turbulence dès le voisinage de \bar{h}_s 	$z \geq 50 z_0$ z_0 ne dépend que de la plaque $z_0 \sim \bar{h}_1/30 - \bar{h}_1/10$

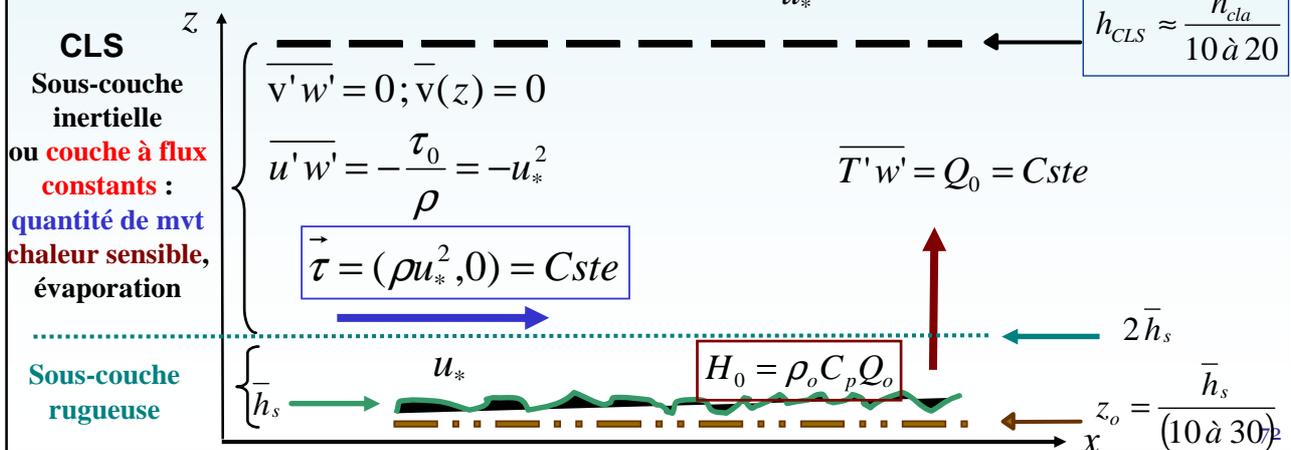
Couche limite de surface ou couche superficielle



- Hypothèses de la couche limite de surface
 - Direction du vent constante, effet de Coriolis négligeable
 - Écoulement stationnaire, homogène horizontalement
- Les transferts turbulents sont déterminés par l'interaction avec la surface considérée comme homogène et dynamiquement rugueuse
- Les flux turbulents sont constants et égaux à leur valeur à la surface terrestre (en axes naturels CLS (Ox selon $\vec{\tau}_0$)

$$u_* = (\tau_0 / \rho)^{1/2} \quad \theta_* = -\frac{Q_0}{u_*}$$

$$h_{CLS} \approx \frac{h_{cla}}{10 \text{ à } 20}$$



Variation logarithmique de la vitesse moyenne du vent



$$\left| \begin{array}{l} \bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z - z_d}{z_0}\right) \quad z > 2\bar{h}_s \\ \bar{u}(z_o + z_d) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z_0 = \frac{\bar{h}_s}{10 \text{ à } 30} \\ 0 \leq z_d \leq \bar{h}_s \end{array}$$

Paramètres macroscopiques des surfaces naturelles

- La longueur de rugosité est définie comme étant l'altitude à laquelle il faut élever l'origine pour tenir compte de la présence des aspérités à la surface. Il faut garder à l'esprit que la loi logarithmique n'a pas vocation à représenter la vitesse moyenne réelle au voisinage de z_0
- La hauteur de déplacement, qui est comprise $0 \leq z_d \leq \bar{h}_s$ selon la hauteur et la nature du micro-relief, permet de prolonger la zone de validité de la loi "logarithmique de la vitesse moyenne" jusqu'au voisinage de \bar{h}_s

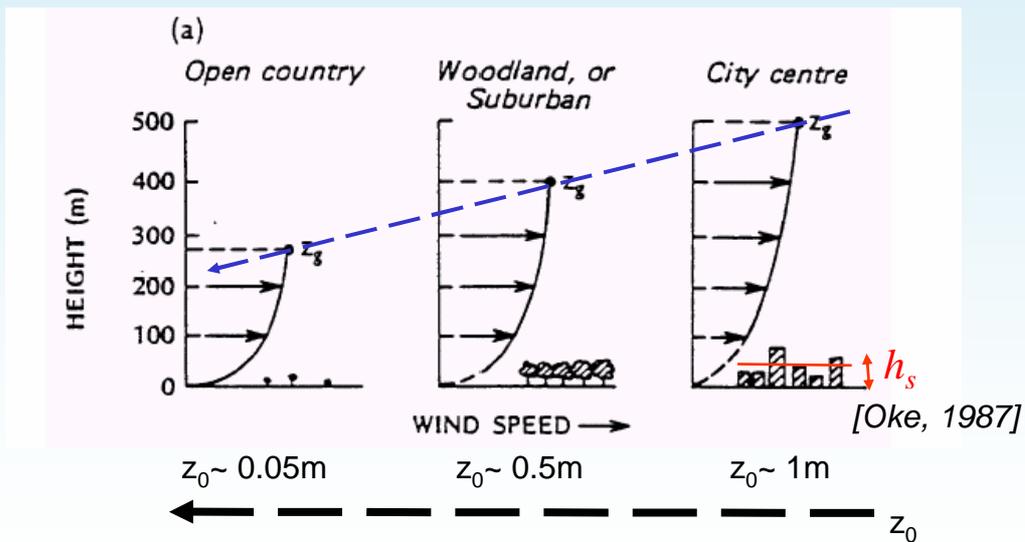
	Neige	Sable	Herbe rase $h_s=1,5 \text{ à } 3 \text{ cm}$	Herbe haute $h_s=0.65 \text{ m}$	Buissons	Forêts $h_s=10 \text{ m}$	Villes
z₀ (m)	10⁻⁵	3.10⁻⁴	2.10⁻³ à 7.10⁻³	(vent modéré) 4 à 9.10⁻²	0.1	0.5 à 1	1

- Les surfaces de neige, de glace et d'eau par vent calme sont lisses. La rugosité de la mer est complexe à définir (interactions vent / vague)

Couche de surface neutre



Variation logarithmique de la vitesse moyenne du vent
influence de la longueur de rugosité



Variation logarithmique de la température moyenne



- Hypothèses de la couche limite de surface CLS

- Direction du vent constante, effet de Coriolis négligeable
- Écoulement stationnaire, développé suivant x, quasi-neutre, paroi rugueuse

$$-k_{\theta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \overline{T'w'} = Q_0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Flux vertical cinématique moyen de chaleur} \\ \text{sensible en surface. } Q_0 \text{ est le flux vertical} \\ \text{(moyen) de chaleur sensible en surface} \end{array} \quad Q_0 = \frac{H_0}{\rho_o C_p}$$

- En utilisant la température de frottement $\theta_* = -\frac{Q_0}{u_*}$

$$\bar{T} - \bar{T}_s = \frac{Pr_t \theta_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z-d}{z_{0h}} \right)$$

$$z_{0h} = z_o \exp \left(-\kappa P \left(Pr, \frac{\bar{h}_s u_*}{\nu} \right) \right)$$

\bar{T}_s = température de surface

$Pr = \frac{\nu}{k_{\theta}}$; $Pr_t = \frac{\nu}{k_{\theta t}}$ Nombre de Prandtl, nombre de Prandtl turbulent

- La longueur de rugosité thermique caractérise de façon macroscopique l'effet de la rugosité de la surface sur le **transfert thermique**. En pratique, on prend souvent $z_{oh} = z_o$

Couche de surface non-neutre



- Paroi rugueuse - Stratification quelconque -

Profil de vitesse

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right)$$

Flux turbulent de quantité de mvt

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$$

Profil de température

$$\bar{T} - \bar{T}_s = \frac{\rho_r \theta_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_{0h}}\right)$$

Flux turbulent de chaleur

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{\theta_*}{\kappa z}$$



Théorie de Monin et Obukhov

Théorie de similitude de Monin et Obukhov (1954)



- **Longueur de Monin-Obukhov** définie une échelle de longueur pour la flottabilité

$$L = -\frac{u_*^3}{\kappa\beta T'w'} = -\frac{u_*^3}{\kappa\beta Q_0} = \frac{u_*^2}{\kappa\beta\theta_*}$$

- **Indice de Monin-Obukhov** est une mesure des effets relatifs du cisaillement et de la flottabilité

$$\xi = \frac{z}{L} \begin{cases} \rightarrow \xi > 0 \quad L > 0 & \text{Stratification stable} \\ \rightarrow \xi = 0 \quad L \rightarrow +\infty & \text{Stratification neutre} \\ \rightarrow \xi < 0 \quad L < 0 & \text{Stratification instable} \end{cases}$$

- **Théorie de similitude** Toutes les dérivées locales verticales des variables moyennes turbulentes adimensionnées par des échelles pertinentes s'expriment par des fonctions universelles de ξ

Échelles pertinentes : u_*, θ_*, L ➔ $\frac{M(z)}{M_*} = f_M(\xi)$

=> Les caractéristiques des processus turbulents ne dépendent que de ξ

Corrections des flux et des profils turbulents



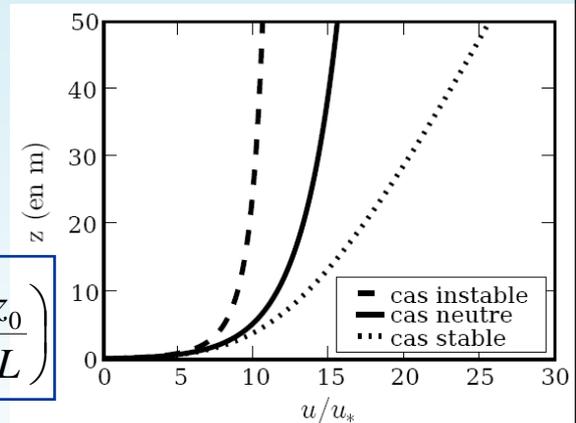
- Paroi rugueuse - Stratification quelconque -

Flux turbulents

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \phi_m(\xi) \quad \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \phi_h(\xi)$$

Profil de vitesse

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right) - \psi_m\left(\frac{z-d}{L}\right) + \psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right)$$



Profil de température

$$\bar{T}(z) - \bar{T}_s = \frac{P_{rt} \theta_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_{0h}}\right) - \psi_h\left(\frac{z-d}{L}\right) + \psi_h\left(\frac{z_{0h}}{L}\right)$$

En stratification thermique, les profils verticaux sont représentés par des expressions pseudo-logarithmiques

Fonctions de similitude Exemple de Businger et Dyer



Les fonctions universelles sont les mêmes quelle que soit la couche limite de surface

- **Correction des flux turbulents**

- Stratification stable $\phi_m(\xi) = \phi_h(\xi) = 1 + 5\xi$ pour $0 \leq \xi < 1$
- Stratification instable $\phi_m^2(\xi) = \phi_h(\xi) = (1 - 15\xi)^{-1/2}$ pour $-5 < \xi < 0$

- **Correction des profils turbulents**

$$\psi(\xi) = \int_{\frac{z_0}{L}}^{\frac{z-d}{L}} \frac{(1 - \phi(\xi))}{\xi} d\xi$$

- **Définition du nombre de Prandtl turbulent**

$$P_{rt} = \frac{v_t}{k_{\theta t}} = \frac{\phi_h(\xi)}{\phi_m(\xi)}$$

Ex5 : Profil de vent dans la couche limite de surface



Le tableau indique les résultats de mesures simultanées des composantes zonales et méridienne u et v du vent à différents niveaux z au-dessus du sol. La température à 2 mètres est de 20°C . Ces mesures sont effectuées au-dessus d'un couvert végétal de hauteur moyenne h_s égale à 1 mètre. La hauteur du couvert étant non négligeable, il est nécessaire de raisonner avec la variable $z'=z_0-z_d$, z_d étant une hauteur de déplacement calculée ici par $z_d=0,6h_s$

z(m)	2	3	4	5	10	15	20	25	30
u (m/s)	2,6	3	3,3	3,55	4,2	4,6	4,9	5,1	6
v (m/s)	1,5	1,75	1,95	2	2,4	2,6	2,8	3	4

1-A) Exprimer la vitesse du vent en fct de z , z_d , u_* et d'une longueur de rugosité z_0

B) Proposer une valeur pour l'épaisseur de la CLS

2-Quels sont les profils de la température potentielle et de la température ?

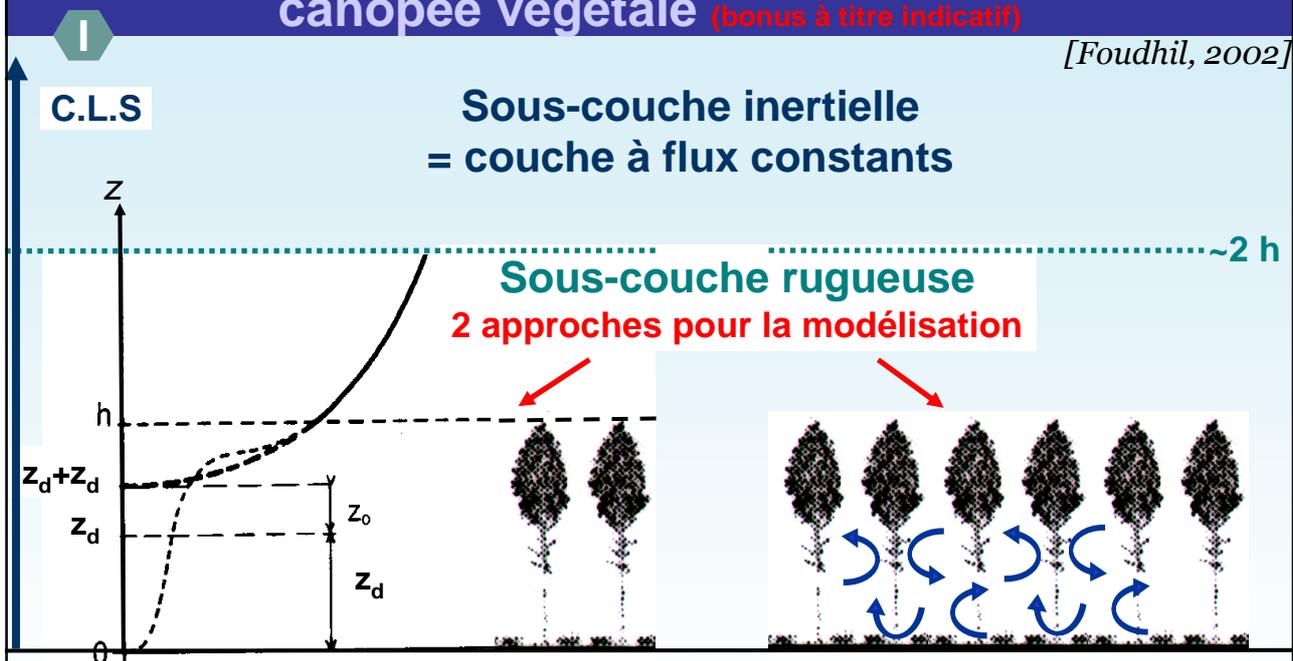
3-A) Calculer la vitesse de frottement et la longueur de viscosité

B) Montrer que l'on peut à partir des mesures avoir une approche de u_* et z_0 même si on ne connaît pas z_d

C) Montrer que les mesures d'une seule composante du vent permettent de déterminer z_0

Sous-couche rugueuse canopée végétale (bonus à titre indicatif)

[Foudhil, 2002]



1- Paramétrage du sol par des lois de paroi (fct de z_0, z_{oh})

Végétation = surface

2- Équations spécifiques dans la végétation

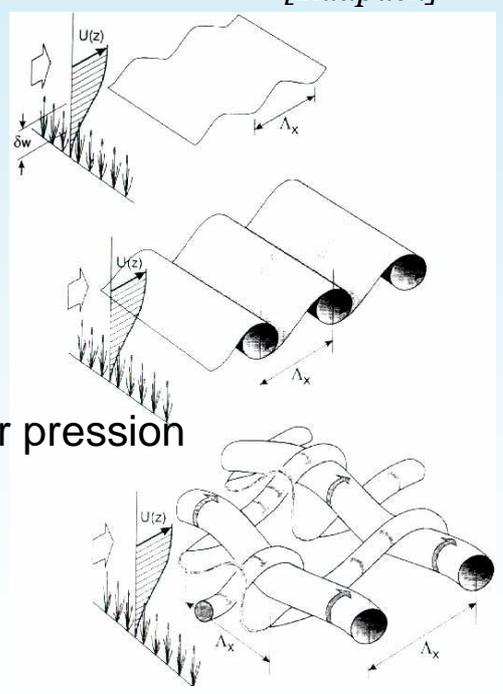
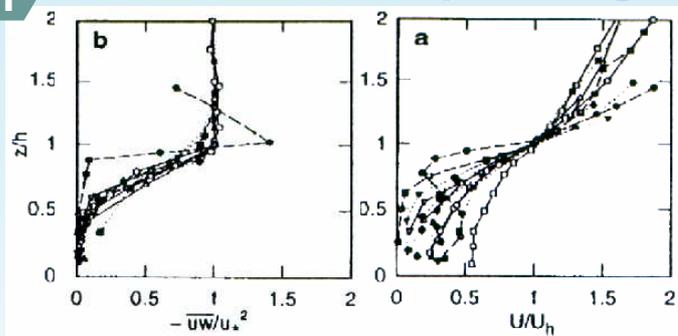
Végétation = volume

Écoulement turbulent dans une canopée végétale (bonus à titre indicatif)

I

IV

[Raupach]



Interaction végétation-écoulement

- Flux qdm **non conservatif** absorbé par pression et viscosité par les végétaux
- Analogie avec la **couche de mélange**
- Turbulence **très intermittente**
- Génération de **sillages** turbulents

Modélisation de l'écoulement turbulent dans un couvert végétal (bonus à titre indicatif)

I

[Foudhil, 2002]

• Définition d'un opérateur moyenne spatio-temporelle

- Moyenne temporelle $f = \bar{f} + f'$

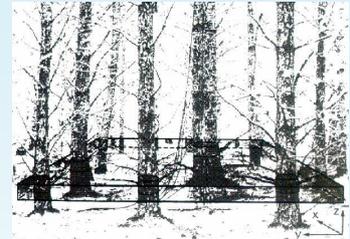
- Moyenne spatiale $\bar{f} = \langle \bar{f} \rangle + \bar{f}''$

• Problème de fermeture $\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle + \langle \overline{u''_i u''_j} \rangle$

- Modélisation des corrélations turbulentes

$$\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle + \langle \overline{u''_i u''_j} \rangle = \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle}{\partial x_i} \right)$$

Flux turbulents Flux dispersifs



➔ Modèle de type k-ε de canopée

$$Eq \langle \bar{u} \rangle - C_d(z) a(z) \sqrt{\langle \bar{u}_j \rangle \langle \bar{u}_j \rangle} \langle \bar{u}_i \rangle \leftarrow \text{Force due à l'absorption par la végétation (force de traînée)}$$

Coefficient de traînée Densité de surface foliaire frontale

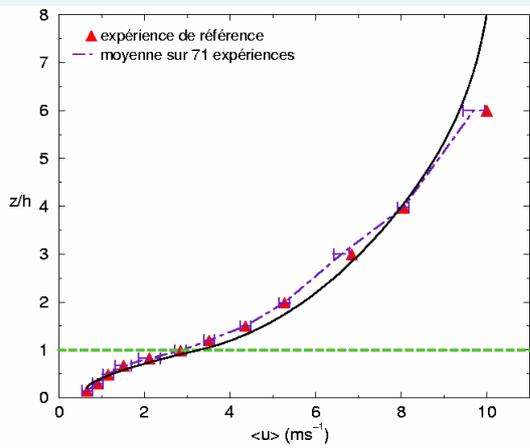
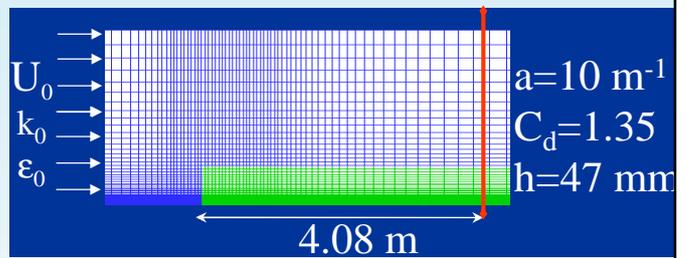
$$\bullet Eq \langle k \rangle + P_w - \epsilon_w \quad \bullet Eq \langle \epsilon \rangle + P_{\epsilon_w} - D_{\epsilon_w}$$

Ecoulement dans un couvert végétal

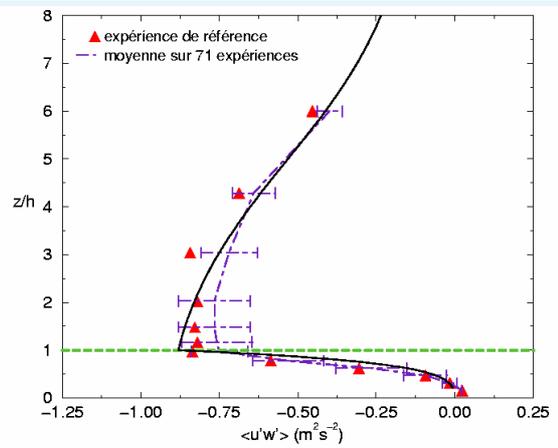
(bonus à titre indicatif)

[Foudhil, 2002]

I



Vitesse moyenne horizontale (ms^{-1})



Flux turbulent (m^2s^{-2})

La couche limite de transition



- Au-dessus de la CLS, on trouve la couche limite de transition CLT, couche supérieure de la CLA
- Peu d'hypothèses simplificatrices applicables
 - L'écoulement n'y est pas en général quasi-stationnaire
 - Les forces de **pression et de Coriolis ne sont pas négligeables**
 - L'influence directe de la surface est importante (directe s'interprète comme « sur une durée de 24 heures »)
- Les résultats classiques
 - Les théories de similitudes de la CLS peuvent se généraliser et déboucher sur des relations reliant les sauts des paramètres entre la base et le sommet de la CLA
 - Le profil de température suit une évolution diurne typique
 - Le **vent subit une rotation quand z augmente**

Couche limite d'Ekman



- **Approximations de ce modèle simple**

- Hypothèse d'homogénéité horizontale (sauf pour P) $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \approx 0$
- Ecoulement stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$
- Vent géostrophique à la limite sup. neutre et barotrope $\vec{u}_H \rightarrow \vec{u}_g$
- Diffusion moléculaire négligeable $\frac{\partial \vec{u}_g}{\partial z} = 0$
- Adhérence à la surface

Équation de quantité de mvt : équilibre pression - Coriolis - frottement

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - f(\bar{v} - v_g) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} + f(\bar{u} - u_g) = 0$$

$$\overline{u'w'} = -K_u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \overline{v'w'} = -K_u \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

K_u étant un coefficient d'échange turbulent == viscosité turbulente

- **Hypothèse supplémentaire : K_u constant sur la verticale**

Spirale d'Ekman



- On passe en variables complexes $V = \bar{u} + i\bar{v}$ $V_g = u_g + iv_g$
- **L'équation devient**
$$K_u \frac{\partial^2 (V - V_g)}{\partial z^2} - if (V - V_g) = 0$$
- **Conditions limites**
 - Parallélisme du vent et de la tension turbulente au sol $z \rightarrow 0$
 - α_g : valeur de l'angle entre la tension à la surface (c-a-d dans la CLS) et le vent géostrophique ($\alpha_g < 0$ hémisphère nord)
- **Dans un système d'axes horizontaux tels que Ox est // au vent géostrophique, la solution est**

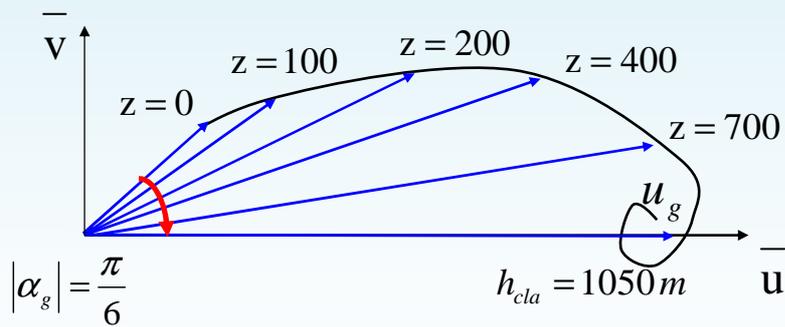
$$V(z) = |V_g| \left\{ 1 + \sqrt{2} \sin \alpha_g \exp \left[- (1+i) \left(\frac{f}{2K_u} \right)^{1/2} z + i \left(|\alpha_g| + \frac{3\pi}{4} \right) z \right] \right\}$$

Cette formule est une spirale logarithmique dite «spirale d'Ekman»

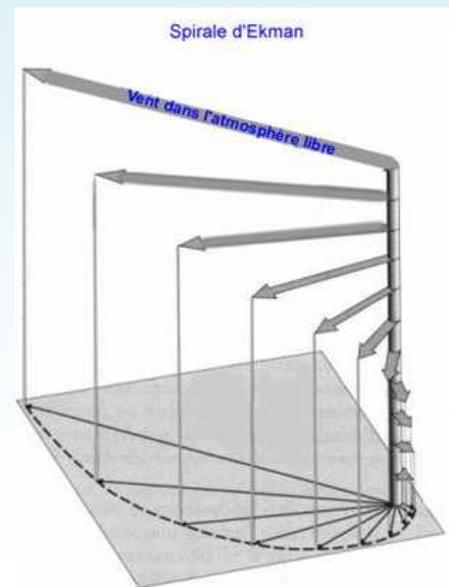
Spirale d'Ekman type



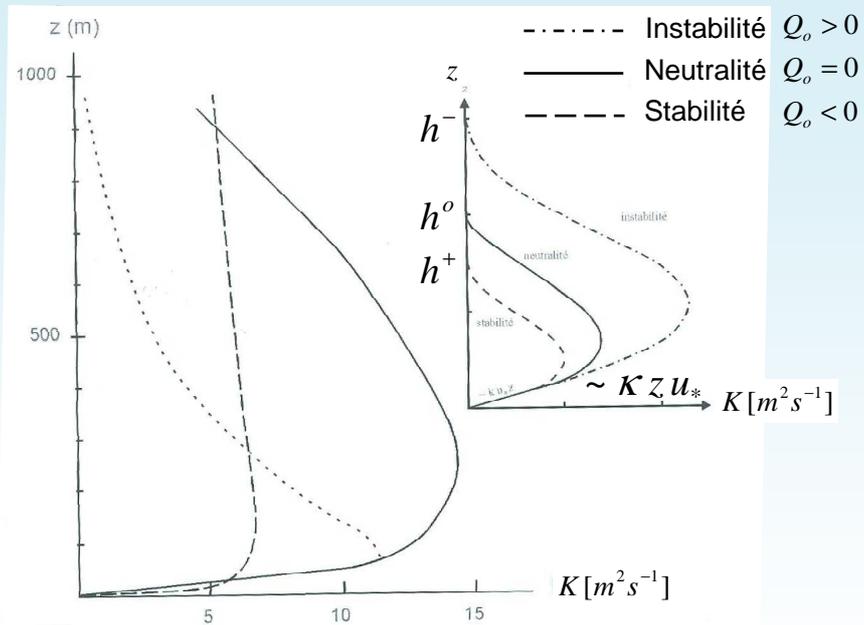
$$\begin{aligned}
 u_g &= 10 \text{ m/s}, v_g = 0 \\
 K_u &= 5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}, f = 7.29 \cdot 10^{-5} \\
 h_{cla} &\Rightarrow \bar{u}(h_{cla}) = u_g \\
 h_{cla} &= 1050 \text{ m}
 \end{aligned}$$



Le modèle d'Ekman explique la rotation du vent avec l'altitude



Profils de coefficient d'échange turbulent dans la CLA



Exemples de profils de coefficient d'échange turbulent, déterminés expérimentalement dans la CLP (le plus à droite correspond au profil de vent historique dit de « Leipzig »). En médaillon, l'allure type visée par la modélisation pour les coefficients d'échanges

Le modèle d'Ekman est utile mais n'a qu'une validité qualitative !

Atmosphère libre : vent géostrophique

IV

- **Approximations du modèle**

- Hypothèse d'homogénéité horizontale (sauf pour P) $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \approx 0$
- Ecoulement stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$
- **Turbulence négligeable**
- Diffusion moléculaire négligeable
- Adhérence à la surface

- **Equations de continuité** $\overline{w} = 0$

- **Equations du mouvement du vent géostrophique**

$$\begin{aligned} -fv_g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ +fu_g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

90

Structure de la CLA

ATMOSPHERE LIBRE

IV

Équilibre des forces de • Pression
• Coriolis

Théorie géostrophique

$$h_{cla} \approx 1000 m$$

COUCHE LIMITE DE TRANSITION

III

Équilibre des forces de • Pression
• Coriolis
• Reynolds

Théorie Rossby et Zilitinkevich - Deardorff

Ou couche d'Ekman

COUCHE LIMITE SUPERFICIELLE (CLS)

II

Théorie de Monin - Obukhov

$$h_{CLS} \approx \frac{h_{cla}}{10 \text{ à } 20}$$

SCI

$$\overline{u'w'} = -\frac{\tau_0}{\rho} = -u_*^2$$

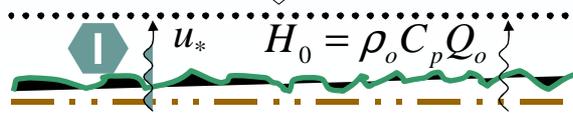
$$\overline{T'w'} = Q_0 = -u_*\theta_*$$

Flux Constants

$$L_{MO} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta \theta_*} \quad \xi = \frac{z}{L_{MO}}$$

SCR

$$\bar{h}_s$$



$$2\bar{h}_s$$

$$z_o = \frac{\bar{h}_s}{(10 \text{ à } 30)^{91}}$$

Principales notations (1)

u_j : composante de la vitesse instantanée suivant j [$m.s^{-1}$]

P : pression instantanée [$kg.m^{-1}.s^{-2}$]

T : température instantanée [K]

θ : température potentielle instantanée [K]

f : grandeur aléatoire \bar{f} : moyenne de Reynold ; f' : fluctuation

ρ : masse volumique [$kg.m^{-3}$]

f_1 : écart à l'état de référence

f_o : valeur moyenne dans la CLA de l'état de référence

f_r : état de référence

k : énergie cinétique moyenne du mvt turbulent [$m^2.s^{-2}$]

ε : taux de dissipation de k [$m^2.s^{-3}$]

l' : échelle de longueur caractéristique des tourbillons énergétiques [m]

u' : échelle de vitesse caractéristique du mvt turbulent [m]

Principales notations (2)

C_p : capacité calorifique massique à P cste $[m^2.s^{-2}.K^{-1}]$

C_v : capacité calorifique massique à V cste $[m^2.s^{-2}.K^{-1}]$

λ : conductivité thermique $[kg.m.s^{-3}.K^{-1}]$

k_θ : diffusivité thermique $[m^2.s^{-1}] = \lambda / (\rho C_p)$

k_{θ_t} : diffusivité thermique turbulente $[m^2.s^{-1}] = \nu_t / Pr_t$

μ : viscosité dynamique $[kg.s^{-1}.m^{-1}]$

ν : viscosité cinématique $[m^2.s^{-1}] = \mu / \rho$

Re : nombre de Reynolds [-]

ν_t : viscosité turbulente $[m^2.s^{-1}]$

Pr : nombre de Prandtl [-]

Pr_t : nombre de Prandtl turbulent [-]

M_{air} : masse molaire = $28,965338 \cdot 10^{-3} kg.mol^{-1}$

R : constante massique des GP. Pour l'air sec $R = 287 J.kg^{-1}.K^{-1}$

Principales notations (3)

u_* : vitesse de frottement [m.s^{-1}]

θ_* : température de frottement [K]

H_0 : flux de chaleur sensible en surface [W.m^{-2}]

Q_0 : flux vertical cinématique moyen de chaleur en surface [K.m.s^{-1}] = $H_0 / (\rho C_p)$

z_0 : longueur de rugosité dynamique [m]

z_{0h} : longueur de rugosité thermique [m]

l_m : longueur de mélange [m]

z_d : hauteur de déplacement [m]

L : longueur de Monin et Obukov [m]

ξ : indice de Monin et Obukov [-]

ϕ_m, ϕ_h : fonctions de similitude flux - gradient [-]

Principales notations (4)

β : coefficient de flottabilité $[m.s^{-2}.K^{-1}]$

f : paramètre de Coriolis = $2|\Omega|\sin\phi$ $[s^{-1}]$

x_j : coordonnée cartésienne suivant la direction j $[m.s^{-1}]$

g : accélération de la pesanteur $[m.s^{-2}]$

r : constante universelle des GP = $8.314 J.mol^{-1}K^{-1}$

t : temps $[s]$

ϵ_{ijk} : symbole d'Einstein vaut 1 si $i, j, k = 1,2,3$ ou -1 si $i, j, k = 3,2,1$ sinon 0

δ_{ij} : symbole de Kronecker vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$: dérivée particulière

Modèles statiques de l'atmosphère (1)

Atmosphère statique : $V=0$ et $dV/dt=0$

- P, T, ρ ne dépendent que de z
- Approximation **hydrostatique** (équilibre entre la force de gravité et la composante verticale de la force de pression)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

- **Atmosphère homogène** $\rho = \rho_0 = Cste$ $P(z) = P_s - \rho_0 g z$

- **Atmosphère isotherme** $T = T_0 = Cste$ $P(z) = P_{sol} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

A l'atmosphère réelle de caractéristiques de surface P_s, T_s, ρ_s on peut associer l'atmosphère homogène « équivalente » d'épaisseur H appelée hauteur d'échelle

$$H = \frac{RT_s}{g} \approx 8 \text{ km} \quad T_s = 273 \text{ K}$$



Modèles statiques de l'atmosphère (2)

- Atmosphère à gradient constant $\frac{\partial T}{\partial z} = Cste = -\Gamma_w$

$$\begin{cases} T(z) = T_s - \Gamma_w z \\ P(z) = P_s \left(1 - \frac{\Gamma_w z}{T_s} \right)^{g/R\Gamma_w} \end{cases}$$

Valeurs typiques

$$\Gamma_w = 6.5 \text{ K / km}$$

$$T_s = 273 \text{ K}$$

- Atmosphère adiabatique $\theta = \theta_0 = Cste$

$$\Gamma_w = \Gamma_{ad} = \frac{g}{C_p}$$

✳ Etat de référence

$\Gamma_{ad} = 10 \text{ K / km}$ est le gradient adiabatique sec

- Atmosphère standard (norme internationale utilisée dans l'aéronautique)

$$P_s = 1013,25 \text{ hPa} \quad T_s = 288,15 \text{ K} \quad \rho_s = 1,225 \text{ kg / m}^3$$

$$\Gamma_w = 6.5 \text{ pour } 0 \leq z \leq 11 \text{ km}$$

$$\Gamma_w = 0 \text{ pour } z > 11 \text{ km} \quad T = Cste = -56.5^\circ \text{C}$$

Température potentielle (1)

- C'est une transformation au cours de laquelle il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur
 - compression adiabatique (diminution du volume de la particule ou augmentation de la masse volumique) => augmentation de l'énergie interne et donc de T => P, ρ, T augmentent (GP)
 - détente adiabatique : P, ρ, T diminuent
- On montre que

$$\left. \frac{T}{P^{\frac{R}{C_p}}}\right)_{adiab} = cst \rightarrow \frac{T_A}{P_A^{\frac{R}{C_p}}} = \frac{T_B}{P_B^{\frac{R}{C_p}}}$$
- On pose $P_B = P_0$ (pression standard) alors T_B est par définition la température potentielle de la particule

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{R}{C_p}} \quad \begin{array}{l} P_0 = 1000 \text{ hPa} \\ R / C_p = 0.28 \text{ (air sec)} \end{array}$$

Température potentielle (2)

- La température potentielle d'une particule d'air est la température qu'elle aurait si on lui faisait subir une transformation adiabatique en modifiant sa pression pour l'amener à la valeur de référence $P_0 = 1000 \text{ hPa}$

$$\left| \begin{array}{l} T = 263,5 \text{ K} \\ P = 800 \text{ hPa} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Évolution adiabatique}} \theta = 263,5 \left(\frac{P_0}{800} \right)^{\frac{R}{C_p}} = 280 \text{ K}$$

- Le profil vertical de la température potentielle est très différent de celui de la température T car les variations ne prennent pas en compte les variations de la pression

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p} \right)$$